Conceptualización matemática a través de la geometría fractal: El límite y el infinito matemático

JOSE CARLOS SANCHEZ BASTIDAS

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
Pereira, 2017

Conceptualización matemática a través de la geometría fractal: El límite y el infinito matemático

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Magister en Enseñanza de las Matemáticas

JOSE CARLOS SANCHEZ BASTIDAS

Director:
Pedro Pablo Cárdenas Alzate, Ph.D (c)

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
Pereira, 2017

Nota de Aceptación

Jurado

Jurado

Jurado

Pereira, 2017.

AGRADECIMIENTOS

A Dios por brindarme sabiduría y paciencia, por permitirme conocer y trabajar con las matemáticas y darme la vida y la oportunidad de disfrutarlas.

Al profesor Pedro Pablo Cárdenas Alzate por su acompañamiento en el proceso, por su visión y sus consejos para ser un mejor profesional y por brindarnos sus conocimientos a lo largo de la maestría.

A los profesores de la maestría en enseñanza de las Matemáticas, que con su conocimiento y experiencia aportaron para el crecimiento de mejores docentes en las aulas.

A la maestría en enseñanza de las Matemáticas, por su apoyo en el proceso educativo y por brindarnos herramientas para llegar al objetivo de ser mejores docentes.

A mi madre Alba Lucia por apoyarme y brindarme fuerzas para cuando era necesario, a mis tías por su apoyo incondicional.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN **9**

1. PLANTEAMIENTO GENERAL **11**
1.1. Objetivos 11
1.1.1. Objetivo general 11
1.1.2. Objetivos específicos 11
1.2. Antecedentes 11

2. MARCO TEÓRICO **14**
2.1. Fractales 14
2.2. Infinito 17
2.3. Límites matemáticos 18

3. FRACTALES **21**
3.1. Los Fractales vs la educación 24
3.2. Teoría de aprendizaje constructivista 24
3.3. Identificación y construcción de los fractales 25

4. EL INFINITO Y FRACTALES **27**
4.1. La auto similitud de los fractales 27
4.2. El infinito matemático 29
4.3. ¿Existe la relación del infinito y los fractales? 30

5. LÍMITES MATEMATICOS Y FRACTALES **32**
5.1. La curva de Koch como herramienta 33
5.2. El conjunto de Julia y el conjunto de Mandelbrot 35

6. GUÍAS DIDÁCTICAS **38**
6.1. Inicio 40
6.2. Desarrollo de los conceptos infinito y límite 41
6.3. Resultados encontrados 42

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS **44**

BIBLIOGRAFÍA **46**

1. Guia 1 **48**

2. Guia 2 **55**

3. Guia 3 **62**

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Triángulo de Sierpinki con Geogebra. 15
2.2. Primera iteración del Triángulo de Sierpinki con Geogebra. 15
2.3. Segunda iteración del Triángulo de Sierpinki con Geogebra. 16
2.4. Tercera iteración del Triángulo de Sierpinki con Geogebra. 16
2.5. Demostración de que el conjunto de los números racionales es numerable [11]. . 18
2.6. Grafica de $f(x) = x^2$ en geogebra 19
2.7. Grafica de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ en geogebra 20

3.1. Grafica de$\sum_{n=1}^{\infty} b^n cos(a^n x\pi)$ [12] 21
3.2. Representación del conjunto de Cantor en Geogebra 22
3.3. Representación de la curva de Koch en Geogebra 22
3.4. Representación del conjunto de Mandelbrot en Xaos 24

4.1. El conjunto de Cantor en Geogebra 28
4.2. Parte n de la figura 8, mostrando la auto similitud de la misma. 28
4.3. Conjunto de Mandelbrot en Xaos. 28
4.4. Ampliación realizada al conjunto de Mandelbrot. 29
4.5. Ampliación del conjunto de Mandelbrot donde se encuentra la forma inicial. . . 29
4.6. Representación en la recta de la idea de infinito 30

5.1. Curva de Koch realizada en Geogebra 33
5.2. Primera iteración de la Curva de Koch en Geogebra 34
5.3. Segunda iteración de la Curva de Koch en Geogebra 34
5.4. Tercera iteración de la Curva de Koch en Geogebra 34
5.5. Ampliación de conjunto de Mandelbrot con un conjunto de Julia asociado en Xaos 35
5.6. Conjunto de Julia ampliado 36
5.7. Conjunto de Julia Disconexo a partir de un punto cercano a la frontera de Mandelbrot 37
5.8. Conjunto de Julia disconexo 37

ÍNDICE DE TABLAS

6.1. Selección de aspectos a destacar para la realización de la guía 39
6.2. Actividades iniciales para la apropiación del conocimiento 40
6.3. Desarrollo del concepto de Infinito a través de los fractales 41
6.4. Desarrollo del concepto de límite 42

INTRODUCCIÓN

En las aulas de clase es común ver falta de interés por lo conceptos presentados en matemáticas, es común escuchar la pregunta: ¿eso para que me sirve?, ¿porqué tenemos que aprender eso?. Preguntas que muchas veces son difíciles de responder, esto se resume en falta de interés por lo que se aprende. La tarea docente entonces pasa no solo de brindar sus conocimientos sino también de buscar maneras de que este conocimiento sea de interés para sus estudiantes.

Presentada la situación anterior, se toman dos temas de matemáticas: el infinito y el límite; el primero un concepto abstracto que muchas veces pasa desapercibido sin la importancia del mismo, pasando la posibilidad de presentar uno de los temas de discusión más hablados en la historia de las matemáticas; y el límite una idea que para muchos estudiantes pasa a ser no más que reemplazar un valor, cuando su significado es de gran utilidad en las matemáticas.

Estos dos conceptos se relacionarán con la *geometría fractal*, llamativa por sus formas y colores usados, mudando en diferentes áreas. Conocida especialmente por las formas artísticas de las mismas, en la presente tesis de grado se muestra si hay relación entre los fractales y el infinito y límite matemático y si es posible llevarlo a un ámbito educativo.

Primero se presenta a los fractales desde su componente histórico, partiendo de los matemáticos que precedieron a Mandelbrot, el cual con el uso de ordenadores pudo llevar las ideas que estos no pudieron llegar a ver en vida, pero que sus aportes han resultado de gran utilidad. Se indica cómo se construyen de manera básica los mismos y se presenta al conjunto de Mandelbrot, uno de los fractales más conocidos y que permiten el desarrollo de las ideas presentadas en el trabajo de grado.

El primer concepto que se relaciona con los fractales es el infinito, presentado con la auto similitud de los primeros, en este punto se referencia el trabajo de George Cantor, cuyo trabajo permitió claridad acerca del infinito,los conjuntos de números y la numerabilidad de los mismos, además de otros aportes. También se utiliza el conjunto de Mandelbrot como introducción a los conjuntos de Julia y su interesante conexión.

Con relación al límite se presenta a la curva de Koch para reforzar la identificación y formación de patrones, luego se presenta al límite como herramienta para describir el comportamiento de una función. Finalmente se evidencia la relación entre el conjunto de Mandelbrot y el conjunto de Julia y como la idea de aproximar dentro del primer conjunto se puede relacionar con la del límite para llevarlo a la escuela.

Finalmente se evidencian las guías realizadas donde usando los fractales se presentan los dos conceptos nombrados, las cuales son tres guías con consejos docentes, que puede ser llevado a los salones de clases para despertar interés y mostrar estos conceptos de la mano de la geometría fractal.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO GENERAL

Se realiza la siguiente pregunta como base para la realización de este trabajo de grado ¿Es posible abordar el concepto de infinito y límite matemático a través de la geometría fractal?.

Se plantea la pregunta partiendo de la necesidad de darle importancia a lo que se enseña en las aulas de clase, además de mostrar dos conceptos de manera diferente usando los fractales como herramienta. Se evidencia en primera instancia si existe o no relación con el infinito y límite con la geometría fractal.

Para la relación del infinito y los fractales se usa el concepto de auto similitud de los fractales, para relacionar como una figura puede expandirse indefinidamente, junto con los aportes de George Cantor para relacionarlos y llegar al concepto de infinito. Para el límite se utiliza los patrones de los fractales, así como la relación del conjunto de Mandelbrot y Julia para llegar al concepto de límite.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo general

Describir la conceptualización del infinito matemático y del límite a través de la geometría fractal.

1.1.2. Objetivos específicos

- Definir el concepto de fractal, partiendo de su historia y sus aplicaciones.
- Presentar el concepto de infinito matemático a través la geometría fractal.
- Relacionar el concepto de límite usando la geometría fractal.
- Realizar una guía didáctica donde se evidencien los desarrollos de los objetivos anteriores.

1.2. Antecedentes

El término fractal fue desarrollado por Benoit B. Mandelbrot, se basó en el término del latín fractus que significa roto o fracturado, uno de sus objetivos era el evidenciar patrones en la naturaleza que la *Geometría Euclidiana* no podía tomar.

La idea de fractal ha sido estudiada dando espacio a su usó se extiende en nuevas áreas como medicina, geología, economía $\cdots$,además de tener estudios matemáticos en los que se buscan propiedades,características y manipulación de estas figuras. Una de las características más fascinantes que se encuentran son la belleza y lo atrayente que son a la vista.

El estudio de los fractales fue llevado a cabo gracias a ordenadores que permitían la generación de estas figuras. Sin embargo, existe un desarrollo matemático para la generación de estas. Al ser un concepto relativamente nuevo, el estudio acerca de los fractales no es extenso, lo que lo hace un campo a desarrollar y que se pueda relacionar con otros campos más allá de la matemáticas.

Los fractales tienen la cualidad de ser de utilidad en campos más allá de las matemáticas pasando desde el estudio de superficies, en el artículo [1],realizan el análisis de una superficie encontrando relación con los fractales. También existe un artículo [2],cuyos autores describen los resultados obtenidos al observar partículas en campos de plasma y las estructuras de fractales que se encuentran en el mismo.

Se encuentra que en Colombia la investigación en fractales, se relacionan con geografía o medicina.En la universidad tecnológica de Pereira se encuentra el estudio de Rivera y Lopez[17] donde se evidencia una relación entre la secuencia de Fibonacci y la geometría fractal. En el articulo [18] se evidencia el trabajo relacionado con limites con parte de la convergencia de series infinitas de funciones polinómicas.

Internacionalmente se encuentra más trabajos de fractales y educación encontrando al más cercano a la investigación a desarrollar el articulo [3]. En el artículo se desarrolla actividades a partir de figuras fractales las cuales se desarrolla conceptos de sucesiones, series y la dimensión fractal. Cabe destacar que el estudiante debe tener conocimientos previos de fractales.

También se destaca que se han realizados diferentes actividades cuyo objetivo es enseñar fractales en las escuelas. Se destaca el trabajo realizado por Figueiras [5], donde se desarrollan actividades utilizando fractales para conceptos de geometría.

Se debe nombrar en este punto al "padre" de los fractales Mandelbrot y su libro [6], en especial el capítulo uno donde se dan razones por la cuales estas figuras son ideales para la educación, desde lo atrayente de su belleza, así como lo innovador de estos, y como por lo mismo su área no se reduce solamente a las matemáticas.

En la tesis de grado [19] se recurre al software Geogebra para afrontar obstaculos epistemologicos para la enseñanza del limite de una función. Respecto a estudios relacionado con el infinito se encuentra la tesis de Vargas [7], en donde se estudia la viabilidad de usar el género literario del cuento para el aprendizaje del concepto matemático del infinito. En la tesis de grado [20], Rodriguez de la Universidad tecnologica de Pereira, realiza un acercamiento al infinito mediante el uso de TIC.

En el artículo [8] trata sobre cómo diferentes significados del infinito son dados por los estudiantes, debido a las diferentes visiones del mismo, partiendo del lenguaje matemático del que se rodean y los razonamientos matemáticos que usan de acuerdo a sus conocimientos.

Respecto al modelo pedagógico constructivista se encuentra las indagaciones hechas por Hernandez Y Victoria [21] usando la plataforma Moddle para la construccion de paginas web en estudiantes de grado once. Así como la tesis de grado [22] donde se crea un ambiente de aprendizaje con modelo pedagógico constructivista.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1. Fractales

Un fractal es un objeto geométrico que nunca se acaba y que se repite en diferentes escalas. Su estructura por lo general es compleja y se pueden encontrar en la naturaleza o ser creados al calcular una ecuación simple cientos de veces. Uno de sus principales atractivos reside en la belleza y la novedad que representan, esto es que permiten describir figuras geométricas no regulares, permitiendo una aproximación a las formas reales de la naturaleza.

Debido a la singularidad de encontrar los fractales en diferentes campos de estudios su definición suele variar, pero de manera general se define como la repetición de un proceso geométrico que da lugar a una estructura mayor. Esta estructura es, en la mayoría de casos infinita, sin embargo, se pueden encontrar en la naturaleza objetos fractales (nubes, hojas de árboles, manchas de animales $\cdots$) son objetos finitos.

A pesar de que su forma puede estar compuesta de figuras geométricas comunes, los fractales poseen características que no permite que sean analizado de la misma manera que un objeto geométrico común, por ello son denominados objetos semigeométricos. A pesar de su irregularidad, los fractales son objetos que pueden ser tanto creados por el hombre, como ser encontrados en la naturaleza.

La diferencia con objetos geométricos comunes se observa en la longitud. Esto se deba al que al intentar medir un fractal este siempre se estará ampliando haciendo complejo su medición, por ello al hablar en términos de medición se habla de dimensión fractal.

Entre las características de los fractales se encuentran la auto semejanza, definida por Mandelbrot como: *"En general, F es una estructura auto semejante si puede ser construida como una reunión de estructuras, cada uno de las cuales es una copia de F a tamaño reducido (una imagen de F mediante una semejanza contractiva)"[9]*, esto indica que, al descomponer un fractal en sus partes, cada una de estas es igual que el conjunto original o total.

Aunque el termino fractal debe su nombre a Mandelbrot, su historia se remonta mucho más atrás donde otras mentes matemáticas circularon acerca de la idea de lo que representa los fractales.

Al ser objetos irregulares, los fractales no son tratados en términos geométricos comunes. Al ampliar un fractal el aspecto que toma es el mismo que el original sin importar la resolución con la que es tomada, por ello se dice que son auto similares ya que su forma son copias más pequeñas que la original. Una curva es rectificable cuando su longitud es finita, un fractal al iterar infinitamente, su longitud también aumenta infinitamente por lo que hace que los fractales no sean rectificables.

Un fractal se construye de manera sencilla al tomar una figura y reproducirla en formas más pequeñas. Por ejemplo, si se toma un triángulo y en su interior partiendo de sus esquinas se dibujan otros triangulos y se repite este paso varias veces consecutivas, se construye el triángulo de Sierpinski [1](ver figura 2.1) nombrando anteriormente. Sin embargo, los fractales pueden ser desarrollados con software, utilizando iteraciones matemáticas como lo es el conjunto Mandelbrot.

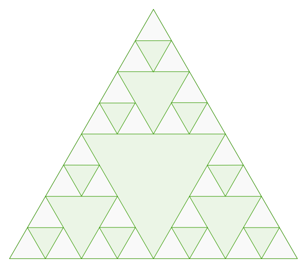


Figura 2.1: Triángulo de Sierpinki con Geogebra.

El triangulo se construye a a partir de un triangulo cómo en la figura 2.2.

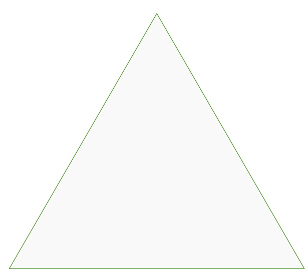


Figura 2.2: Primera iteración del Triángulo de Sierpinki con Geogebra.

Luego se construye otro triangulo usando las esquinas siguiendo la figura 2.3.

Se continua construyendo triángulos cómo en la figura 2.4 , usando los restante lo que permite repetir el proceso las veces que se desee.

El conjunto de Mandelbrot, es uno de los fractales más conocidos, es un conjunto que se define

[1]Waclaw Sierpínski(1882-1969): Matemático Polaco conocido por sus aportes a la teoría de conjuntos, teoría de números, teoría de funciones y topología.

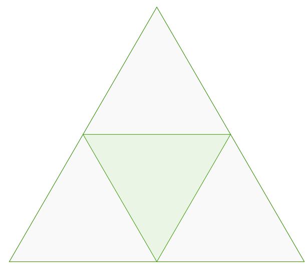


Figura 2.3: Segunda iteración del Triángulo de Sierpinki con Geogebra.

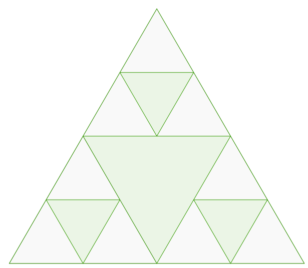


Figura 2.4: Tercera iteración del Triángulo de Sierpinki con Geogebra.

en el plano complejo, nombrado así en honor de Benoit B. Mandelbrot[2]. Es construido a partir de:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

dondé Z es un número complejo y c una contante, se toma un valor fijo c, luego el número complejo z se eleva al cuadrado y se le suma c, a el resultado se aplica el mismo proceso. Tomando $z_0 = 2$ y $c = -1$ tenemos:

$$z_1 = (2)^2 + (-1) = 3$$
$$z_2 = 3^2 + (-1) = 8$$
$$z_3 = (8)^2 + (-1) = 63$$

Si se sigue iterando el resultado, se observa que tiende al infinito. Con base en esto se puede identificar si un numero pertenece o no al conjunto. Se ha de seguir este proceso con todos los puntos del plano, lo que hizo necesario el uso de ordenadores. Sin embargo, algunas de estas iteraciones quedan atrapadas en un intervalo, estas son las que pertenecen al conjunto.

La importancia de los fractales radica de las posibilidades de los mismos, al no ser parte de la geometría conocida, abre el camino para nuevos descubrimientos y aportes. Como lo dice Mandelbrot [9] , la belleza de los fractales, la innovación y como puede ser usados en otras áreas, los hacen ideal como una herramienta para la educación.

[2]Benoit B. Mandelbrot(1924-2010): Matemático polaco reconocido por su trabajo con los fractales.

2.2. Infinito

El infinito nace de la idea de un número tan grande que sea imposible contarlo, son diferentes matemáticos que han dedicado sus mentes para trabajar con esta idea, que permitiría el avance en conceptos matemáticos, que de no ser por la idea del infinito no se llegaría a ningún punto. De estos matemáticos cabe destacar a George Cantor[3] que entre muchos de sus aportes nos permitió agregar una magnitud mayor a los que es esta idea.

El infinito es un concepto abstracto que indica un número más grande que cualquier otro y que no tiene ningún límite. Sin embargo, el concepto de infinito está lejos de ser definido formalmente, es una idea que ha viajado a través de la historia encontrando esta inquietud en diferentes formas, ideas y desarrollos no solo matemáticos sino también en áreas como la filosofía.

Un ejemplo de la idea de infinito se ve en una de las paradojas de Zenon, la paradoja de Aquiles y la tortuga que indica lo siguiente[10]:

Aquiles compite una carrera con la tortuga a lo largo de la línea AB; en un gesto de gallardía, el héroe griego otorga a la tortuga la mitad del terreno, esto es, hasta AB/2. Aquiles dobla a la tortuga en velocidad: cuando Aquiles, el de los pies ligeros alcanza el punto AB/2, la tortuga se ha desplazado al punto AB/4. Sin desesperarse Aquiles camina hasta la punta AB/4 pero para entonces la tortuga ha alcanzado al punto AB/8 y cuando Aquiles llega al punto AB/8 la tortuga está en el punto AB/16, después en AB/32, en Ab/64 y así infinitamente. En términos matemáticos Aquiles jamás podrá superar a la tortuga.(Ferreira Santander Hugo, Zenón, Aquiles, la tortuga y la demostraciondel infinito)

La paradoja tardó mucho tiempo en ser resuelta, se hizo necesario el uso de límites y series, lo que llevo a su explicación y posible solución. La idea que lleva consigo la paradoja, de que Aquiles siempre recorre una distancia infinitamente más pequeña, es decir un número que es infinitamente pequeño.

George Cantor también presentó una forma de ver el infinito, al encontrarlo entre dos cantidades cualquiera, como ejemplo los números entre 0 y 1, tomando en cuenta los numero racionales se encuentra una cantidad infinita de números o entre cualquier otra cantidad, Cantor además de demostrar esta idea, introdujo un concepto adicional: la contabilidad de un conjunto de números.

Cantor propuso y demostró cómo cualquier cantidad puede ser contable o no, incluso demostró que una cantidad infinita puede ser numerable, esto se puede demostrar si el conjunto al cual se quiere demostrar si tiene una biyección con los números naturales.

Además de lo anterior es posible demostrar que un conjunto de números es contable, si disponiéndolas en filas y columnas podemos construir un camino entre ellos sin repetir ningún número, como se ve en la figura 2.5:

[3]George Cantor (1845-1918) Matemático Ruso creador de la teoría de conjuntos

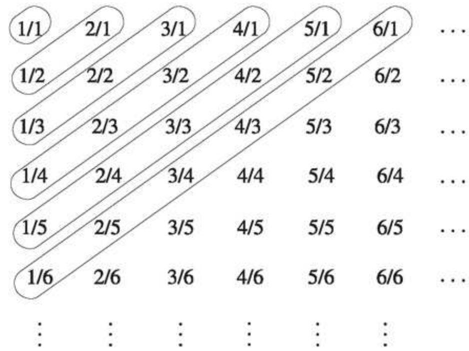


Figura 2.5: Demostración de que el conjunto de los números racionales es numerable [11].

La idea que Cantor desarrollo, es que cualquier conjunto de números puede ser numerable o no y como puede ser demostrado, esto génere la idea de otro conjunto de números y su numerabilidad,como por ejemplo los números irracionales y como no cumplen con las condiciones para serlo.

Analizando el conjunto de números irracionales se encuentra una idea de infinito que no se había considerado hasta que Cantor realizo su trabajo, el infinito no necesariamente se puede ver en número grandes, sino en cantidades tan pequeñas como entre el cero y el uno.

Teniendo en cuenta lo anterior, es difícil definir un concepto de infinito que englobe todas las ideas de diferentes autores han agregado sobre el mismo. La idea de infinito es algo que no puede ser visto o palpado lo que hace mas complejo su compresión , pero es una noción que permite el desarrollo de otras áreas (tal como el concepto del cero lo ha hecho). Debido a esto se puede llegar a la siguiente conclusión acerca del mismo, que permita una base para empezar a conocer el infinito:

El infinito es un concepto que da sentido a una cantidad de tamaño tal que no es posible expresar con una cantidad específica.

2.3. Límites matemáticos

El límite en cálculo permite distinguir el comportamiento de una función a medida que se acerca a un punto definido. Esta definición en principio permite el desarrollo de temáticas tales como la convergencia, continuidad, derivación e integración.
Se representa como sigue:

$$\lim_{n \to a} f(x),$$

esto es el límite de la función $f(x)$ de x que tiende a a.

Tomando como ejemplo la función: $f(x) = x^2$, la cual representa una parábola, si tomamos:

$$\lim_{x \to 2} f(x^2),$$

el cual podemos evaluar en la figura 2.6

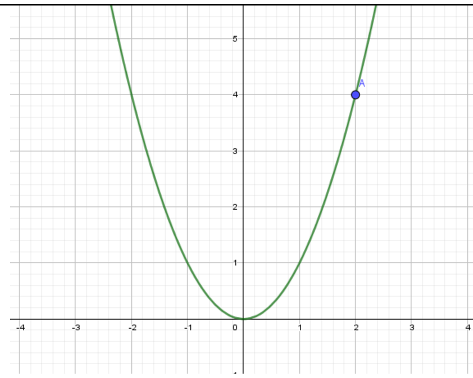


Figura 2.6: Grafica de $f(x) = x^2$ en geogebra

En donde el punto azul A es donde se está evaluando el límite, este indica que la función al llegar al punto 2, la función toma el valor de cuatro y/o se aproxima a tal valor.

El límite de una función permite identificar el comportamiento de la función cuando se aproxima a cierto punto establecido, sin embargo, este comportamiento no se repite en toda función como el ejemplo que sigue:

Sea la función :

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1},$$

se busca el límite:

$$\lim_{x \to 1} f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Si se desarrolla el límite de manera directa se llega a:

$$\lim_{x \to 1} f\left(\frac{2}{0}\right),$$

la cual no es posible de resolver, ya que no hay respuesta para una operación de división entre cero.

Al observar la gráfica 2.7 se encuentra:

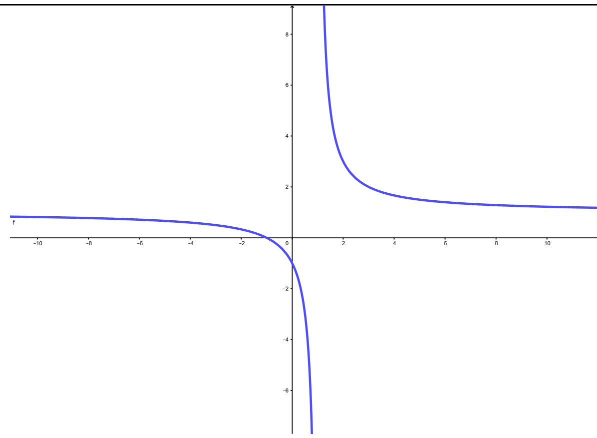


Figura 2.7: Grafica de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ en geogebra

El punto donde se evalúa el límite parece no tener un valor fijo, pero se puede realizar otro acercamiento, para encontrar que ocurre, se toma un valor límite cercano al que se evalúa.

$$\lim_{x\to 0{,}9} \frac{0{,}9+1}{0{,}9-1}$$

$$\lim_{x\to 0{,}9} \frac{1{,}9}{-0{,}1}$$

$$\lim_{x\to 0{,}9} -1{,}8$$

En el procedimiento anterior se acerca por la derecha al límite originalmente deseado, si se continua haciendo lo mismo, se encuentran los siguientes valores:

$$\lim_{x\to 0{,}99} -199$$

$$\lim_{x\to 0{,}999999} -19999999$$

Se destaca que se encuentran cifras de números grandes, ahora si se hace un procedimiento similar hacia la izquierda:

$$\lim_{x\to 1{,}001} 2001$$

$$\lim_{x\to 1{,}00001} 200001$$

Ocurre de igual manera a lo anterior que se acerca a un número grande, por tanto en resumen si se acerca por la derecha el limite tiende al infinito mientras que por izquierda hacia menos infinito.

De esta manera se puede describir el comportamiento de una función en un punto dado, se ha de aclarar que el procedimiento anterior puede ser obviado si se conoce la gráfica, o en que en algunos casos se puede definir el límite cuando se presentan indeterminaciones, usando otros procedimientos.

CAPÍTULO 3

FRACTALES

El concepto de fractal a pesar de ser una teoría relativamente nueva, la realidad es que antes de Mandelbrot ya se habían realizados acercamientos a los mismos sin referirse a estos como fractales. La historia de estas figuras se remonta a la época de Karl Weirstrass[1],al enunciar en 1872 que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^n cos(a^n x\pi),$$

no es diferenciable, sin embargo, no tuvo un soporte claro para mostrar que su afirmación era cierta, ya que evitaban usar gráficas para probar sus resultados, al observar la figura 3.1 de esta función se observa como la función no es diferenciable y muestra picos, no común en funciones parabólicas como el seno o coseno.

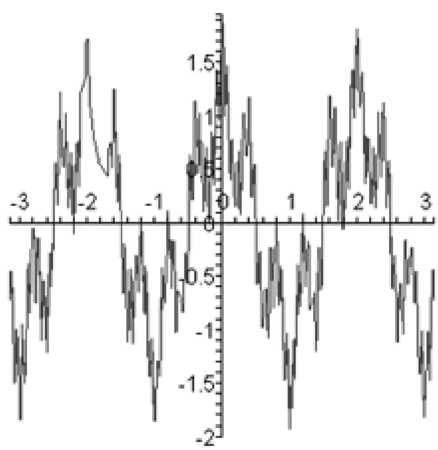


Figura 3.1: Grafica de$\sum_{n=1}^{\infty} b^n cos(a^n x\pi)$ [12]

Este descubrimiento no llevó a algún resultado concreto y pasaría tiempo para que este tipo de funciones estén relacionadas con los fractales. Siguiendo la línea de aportes que más tarde se relacionan con la geometria fractal, se encuentra a George Cantor quien aportó su idea del conjunto de Cantor que se observa en la figura 3.2.

[1]Karl Weirstrass(1815-1897): Matemático Alemán considerado como el padre del análisis moderno

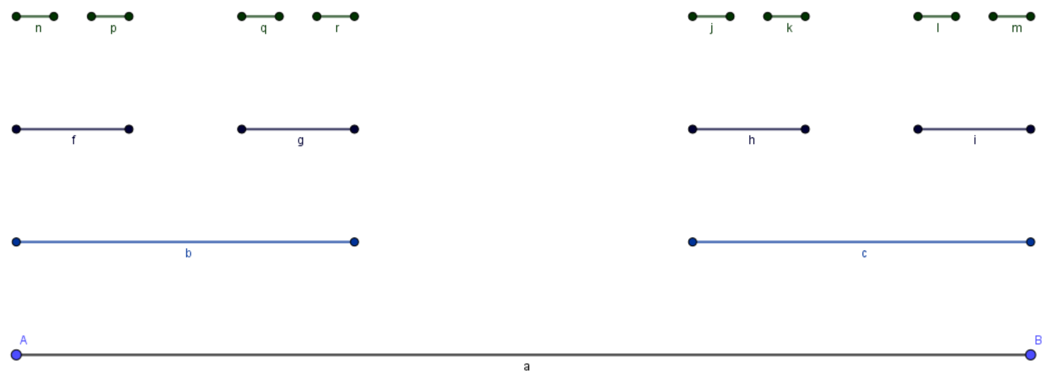


Figura 3.2: Representación del conjunto de Cantor en Geogebra

El conjunto tiene algunas propiedades de un fractal: es auto similar, es decir a partir de una de las partes del mismo se obtiene toda la figura de nuevo pero Cantor no usó estos términos y llegó a esta figura a partir de sus estudios, mas adelante variaciones del conjunto se encontrarían en R2 y R3, tales como la alfombra de Sierpinski, el polvo de cantor y la esponja de Menger. Construido a partir de una linea, la cual es dividida en tres partes iguales eliminando la parte media. Este proceso se repite para cada linea que queda después de la división, es decir que la figura puede seguir siendo iterada indefinidamente.
De manera similar Helge Von Koch[2], con su copo de nieve de Koch que hizo una figura fractal, sin conocer en su época el término y las propiedades del mismo, para la construcción de su variación de la curva de Koch se parte de igual manera de una linea partida en tres partes, agregando en la parte media un triangulo equilátero, este proceso se repite con la lineas restantes, lo que da como resultado la figura 3.3.

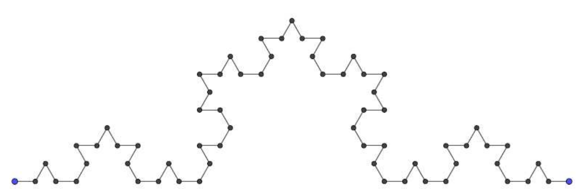


Figura 3.3: Representación de la curva de Koch en Geogebra

Uno de los aportes más importantes viene de parte por Gaston Julia[3]y Pierre Fatou[4]; aunque sus aportes son similares y fueron en épocas comunes, no trabajaron juntos. Sus trabajos fueron acerca del mapeo en el campo de los complejos y las funciones iterativas. Julia trabajó con la idea de puntos atractores y de repulsión, los cuales atraen puntos hacia sí mismo, mientras que otros los rechazan respectivamente. Trabajando esta idea descubre que iterando funciones se encuentras puntos que hacen que los valores de la función muchas veces quedan atrapados a ciertos valores mientras que otros repelían hacia el infinito.

[2]Helge Von Koch(1870-1924): Matemático sueco fue el primero en estudiar una curva fractal

[3]Gaston Julia(1893-1978): Matemático francés precursor de los hoy conocidos fractales e iteración de funciones

[4]Pierre Fatou(1878-1929): Matemático y astrónomo francés estudio procesos iterativos que fueron usados para la geometría fractal

Debido a no tener accesos a computadoras, Julia nunca pudo ver el resultado de sus conjuntos, ya que solo iteraba funciones en no mas de tres iteraciones. Esta se daba al tratar un número complejo en funciones, un ejemplo común es el siguiente:

$$f_c(z) = z^2 + c,$$

dónde c es un numero complejo, se toma entonces la sucesión como sigue:

$$z_c = z$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Si esta sucesión queda acotada(es decir no va hacia él infinito) pertenece a los conjuntos mas tarde denominados como conjuntos de Julia. En algunos casos encontrar si un número pertenece a un conjunto de Julia, requiere varias iteraciones o por el contrario es evidente con pocas, esta idea va ligada a los diferentes colores con los que se encuentra los conjuntos representado usando gráficas en una escala de colores que identifique esta variación de la inclusión de un numero en el conjunto de Julia.

Para terminar este recorrido histórico de los fractales, se llega a Benoit Mandelbrot, sus aportes fueron creciendo gradualmente desde los estudios de dimensión de Hausdorff hasta que en el análisis propio de cómo medir la costa de Inglaterra, le llevó a analizar los aporte de Gaston Julia y Fatou, con el acceso a computadoras darle forma a los conjuntos que Julia nunca pudo ver. Mandelbrot dio el nombre de fractales a este tipo de figuras y se establecieron las características para que una figura pueda o no ser fractal, si cumpla con los términos de dimensión, si es auto similar y su capacidad de ser generados por algoritmos.

El conjunto de Mandelbrot, uno de los primeros fractales que él mismo estudió, partiendo de la idea de los conjuntos de Julia, Mandelbrot usó la misma función:

$$f_c(z) = z^2 + c$$

Tomando

$$z_0 = 0$$

y pasando todo número c complejo y si este no tiende al infinito, es decir órbita en un valor que cumpla no sea mayor 2, pertenece al conjunto. El resultado es una imagen conocida, (ver figura 3.4), a partir de aquí diferentes fractales se desarrollaron usando métodos iterativos y con la ayuda de computadores.

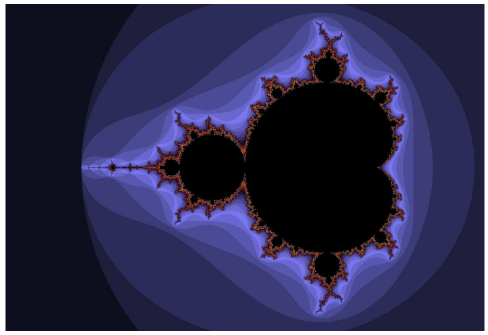


Figura 3.4: Representación del conjunto de Mandelbrot en Xaos

3.1. Los Fractales vs la educación

Los fractales son un tema poco conocido, la palabra no está en el vocabulario de muchas personas, aun así, estas figuras poco a poco empezaron a tomar forma en la academia e investigación. Es común ver en áreas por fuera de las matemáticas, a los fractales ser usados para aportes a investigaciones a otras ciencias, respecto a la educación se han hecho acercamientos usando los fractales para hacer la enseñanza amena o diferente.

Mandelbrot en su libro [10], hace hincapié en algunas de las razones de las cuales los fractales son efectivos en la educación. Al ser relativamente recientes, tienen la característica de novedad en las personas, las primeras imágenes de las mismas presentadas, el conjunto de Julia, Mandelbrot o figuras fractales más simples como el conjunto de cantor despiertan un interés acerca de las mismas, pero como lo indica esto no es suficiente para el aprendizaje.

Con las ideas de Mandelbrot se hizo la guía para que fuera atractivo para los estudiantes y docentes con las siguientes características:

- Los estudiantes aprenden que es un fractal, pero aprenden a hacer fractales

- Se da trasfondo matemático a los fractales y la importancia de su origen. [10]

Los fractales son una herramienta que abre puertas hacia otros temas, como se verá en capítulos posteriores, así teniendo en cuenta las características que Mandelbrot expuso, se busca una síntesis con las teorías de aprendizaje constructivista.

3.2. Teoría de aprendizaje constructivista

Una teoría de aprendizaje es formas de como enseñar, como el propósito de la guía es enseñar de los fractales y su uso para el aprendizaje de otros conceptos, se hace indispensable una teoría que permitan facilitar este proceso, así como mostrar un camino posible para la consecución de este objetivo.

El constructivismo parte de tres ideas fundamentales tanto para el docente como el estudiante:

- Hay condiciones propicias y adecuadas para que el estudiante aprenda
- Los temas que el estudiante ve en la clase están cercana a su entorno o a las experiencias que él mismo haya vivido
- El aprendizaje no es una obligación y el estudiante disfruta del mismo.[13]

Teniendo en cuenta lo anterior y la idea de los fractales mostrada en el punto anterior, se evidencia que los fractales podrían ser usados como una herramienta utilizando la teoría de aprendizaje del constructivismo. Para a la aplicación de las mismas el docente acompaña a los estudiantes, los cuales se recomienda organizar en grupos de trabajo, en tres sesiones de trabajo: la primera como presentación de fractales y la construcción de los mismos, la segunda la presentación del infinito usando los fractales y en la tercera el límite matemático, se recomienda al docente utilizar como metodología el aprendizaje basado en problemas.

El aprendizaje basado en problemas, debido a su cualidad de trabajo independiente del docente, la responsabilidad que el estudiante asume y la posibilidad de trabajo en grupo, donde los elementos del mismo trabajan para superar los obstáculos que encuentren. La responsabilidad del aprendizaje, bajo esta metodología, recae sobre los estudiantes, quienes encuentran en el proceso de aprendizaje una razón por la cual han de seguir el proceso y un motivo solido del porque han de aprender lo que se les presenta.

3.3. Identificación y construcción de los fractales

Un fractal puede ser presentado como una figura llamativa y atrayente, sin embargo acercar los fractales a algo común para los estudiantes da mas posibilidades, presentar un conjunto de Julia o algún fractal básico (alfombra de Sierpinky, el árbol pitagórico etc.) puede resultar interesante pero presentarlos en la naturaleza hace que estas figuras algo cercano. Las figuras geométricas comunes tienden a pasar desapercibidas y son raras en la forma caótica de la naturaleza, los fractales pueden encontrarse en la naturaleza en diferentes lugares, la corteza de los árboles, los pigmentos de las alas de las mariposas, el plumaje de las aves, en fotografías satélite de la tierra, por lo que presentarlo desde este punto de vista y mostrar que no responden a figuras geométricas comunes, genera inquietud y deseo de resolver este tema que se presenta.

La guía presenta la comparación entre objetos que responden a figuras geométricas y otras a fractales, el docente tiene la posibilidad de llevar objetos para que la actividad pueda ser realizada sin fotografías y se identifiquen primero las figuras geométricas comunes, para la figuras fractales no vasta más que las hojas de los árboles y la corteza de los mismos, por lo que la actividad puede comenzar de una manera diferente, el objetivo de la misma es mostrar la diferencia de lo dos, para que el estudiante sepa que no va a tratar con geometría común y que va a aprender un tema nuevo y poco conocido.

En este punto, el docente puede intervenir para, bien guiar a los estudiantes a identificar diferencias de los fractales y las características de las mismas y a definir patrones. Con los patrones se ha de tener cuidado, ya que es esencial en el entendimiento de los fractales, por ello en la guía una de las características que se indican de estas figuras es identificar que tiene patrones que en la mayoría de casos son fácilmente identificables.

La construcción de un fractal en la guía se parte desde el triángulo de Sierpynsky, al ser una figura de fácil construcción permite un acercamiento cómodo a la identificación de patrones y características de los fractales, usando una figura que es conocida, como alternativa se puede optar por material manipulativo para hacer el triángulo, es importante recalcar que parte del objetivo en esta actividad es que los estudiantes descubran características de los fractales y construyan una definición propia de estos.

Se especifica más adelante en la guía, cómo se hace el fractal el conjunto de Mandelbrot como base para en las guías posteriores, mostrar el conjunto de Julia y como es su construcción. Debido a su naturaleza no es fácil construir el conjunto de Mandelbrot, ya que es necesario el uso de computadores y software para la gráfica de los mismos, sin embargo, si el docente tiene acceso a computadores puede ampliar la actividad para hacer estos fractales usado Geogebra o Xaos, ambos de distribución gratuita.

CAPÍTULO 4

EL INFINITO Y FRACTALES

Las fractales tienen la posibilidad de transcender fronteras del conocimiento, asi como instrumento para la educación matemática, después de la presentación de estas figuras en la primera guía, se pasa al segundo objetivo el cual es presentar el infinito matemático.

La idea del infinito suele ser confusa, se puede presentar como una cantidad muy grande pero después al encontrar los números racionales, se encuentra que hay cantidad infinitas entre dos números. El concepto también varía de acuerdo su tratamiento en otras áreas de las matemáticas, sin incluir el concepto que trata la filosofía u otras áreas del conocimiento.

Esta idea puede resumirse en una base desde la cual partir a otras áreas dentro de las matemáticas. El objetivo de la guía desarrollada es tal objetivo, que usando los fractales se llegue al concepto de infinito matemático, usado la auto similitud que permite replicar estas figuras indefinidamente.

4.1. La auto similitud de los fractales

Definida por Mandelbrot como: *"En general, F es una estructura auto semejante si puede ser construida como una reunión de estructuras, cada uno de las cuales es una copia de F a tamaño reducido (una imagen de F mediante una semejanza contractiva)"[9]* , es una de las características de la geometria fractal, que sirve de base para encontrar una relación con el infinito matematico.

En la figura 4.1 se encuentra el conjunto de Cantor, se construye partiendo de una línea que luego es dividida en tres partes, eliminando la parte media, este proceso se repite con las partes resultantes y se sigue el mismo proceso indefinidamente.

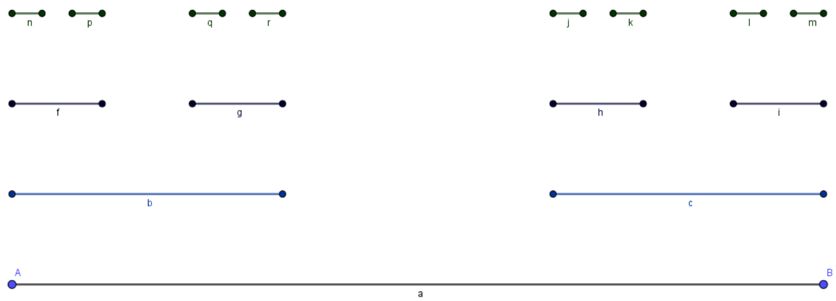


Figura 4.1: El conjunto de Cantor en Geogebra

La auto similitud de los fractales, se indica como la capacidad de ver la figura inicial de un fractal en cualquier parte de la misma, así en la figura 4.2 esta el segmento de modulo n, que es la iteración 4 de la figura inicial. Se puede considerar como una figura desde la cual parte un nuevo conjunto de Cantor, aun en la iteración n se podrá encontrar una línea como la inicial que al dividir en tres y eliminar la parte media, continuará con el patrón tal como en la línea inicial.

Figura 4.2: Parte n de la figura 8, mostrando la auto similitud de la misma.

La capacidad de auto similitud permite a los fractales ser replicados, a lo largo de su expansión y permite que se encuentren formas atrayentes al expandir las mismas, lo que ha permitido la divulgación de fractales tales como Mandelbrot o de Julia que de un proceso sencillo da resultados visuales impresionantes, sin embargo, esto requiere el uso de software, lo cual fue un impedimento en principio para Gaston Julia en el desarrollo de funciones de sucesiones.

La figura 4.3 muestra el conjunto de Mandelbrot en el software gratuito Xaos, este permite la exploración de estos y otros fractales, permitiendo varios niveles de aumento, la auto similitud se puede encontrar en las dendritas, que se ven en la frontera del conjunto.

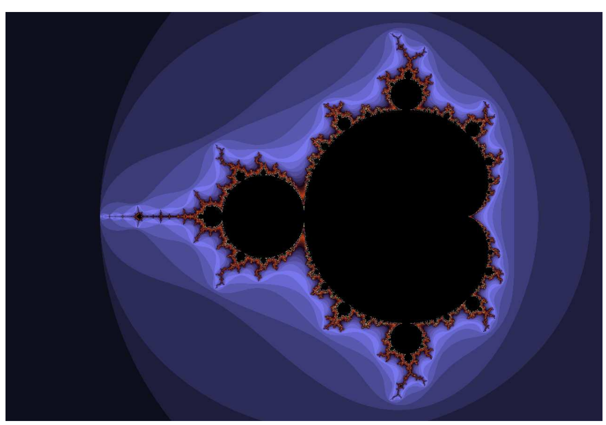


Figura 4.3: Conjunto de Mandelbrot en Xaos.

Al aumentar como se ve en las figuras 4.4 y 4.5 se encuentra la forma inicial del conjunto.

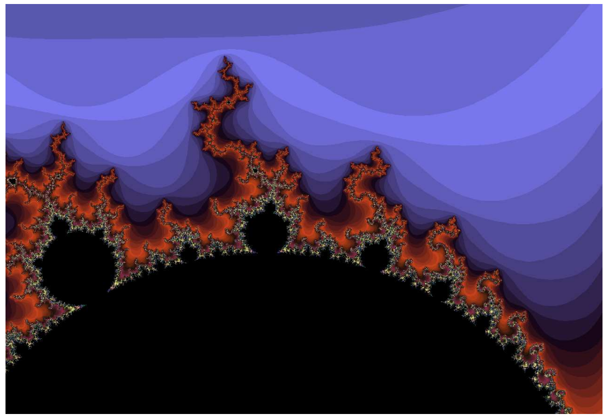


Figura 4.4: Ampliación realizada al conjunto de Mandelbrot.

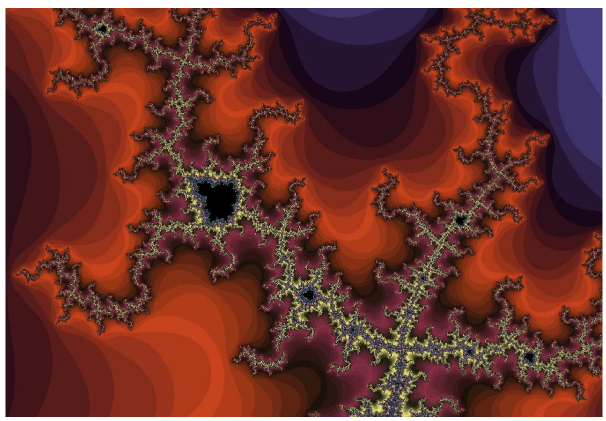


Figura 4.5: Ampliación del conjunto de Mandelbrot donde se encuentra la forma inicial.

Esto expone que la auto similitud se puede observar no solo en fractales sencillos sino en otros de mayor complejidad. En el proceso anterior surge la idea de un fractal es infinito o cual es el límite de los mismos, lo cual es parte del proceso en el aula para qué se encuentre que es el infinito.

4.2. El infinito matemático

El infinito como concepto es manejado en diferentes áreas, sin embargo, en matemáticas su importancia radica en que permite claridad en otros conceptos (límites, teoría de conjuntos...). De manera abstracta se enuncia como un concepto que indica algo sin fin o que no tiene límite. Esta definición al ser abstracta, puede hacer que el significado cambie desde el punto de vista. Por ejemplo, al mirar los estudios de Cantor [22] nos encontramos con lo siguiente en la figura 4.6.

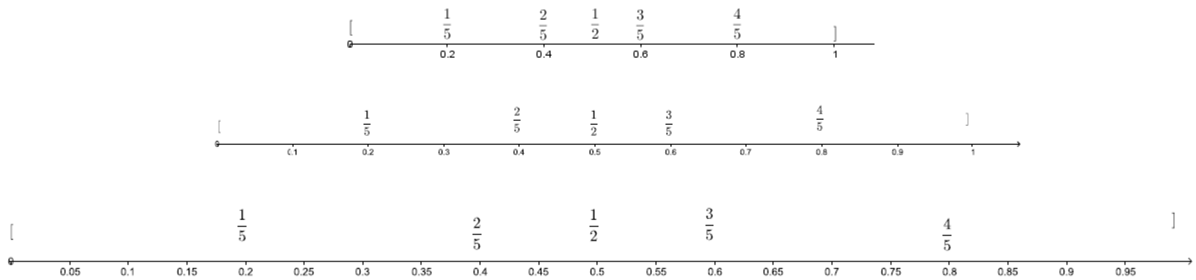


Figura 4.6: Representación en la recta de la idea de infinito

Al analizar el conjunto formado por los números racionales entre 0 y 1:

$$\mathbb{R} \in [0,1].$$

Sin embargo, la facultad de los números racionales, hace que especificar una cantidad exacta para los números en este conjunto, una tarea que depende del punto de vista de quien haga tal obra, sin embargo, visto de una perspectiva general, hay una cantidad infinita en una cantidad finita. Pero para Cantor esto no era un problema si no que abre a más posibilidades, podemos contar hasta el infinito, es decir podemos decir que cualquier conjunto es numerable.

Así el infinito es una convergencia de paradojas, pero esto no evita que la idea general del infinito no pueda ser comprendida, incluso en los fractales se presenta el infinito de manera interesante. La auto similitud hace que en cualquier expansión de una figura fractal, como en el caso del conjunto de cantor, en la iteración n se encontrará una línea la cual permitirá repetir el patrón inicial, ver figura 4.2.

Si se define el infinito desde los fractales, esta sería la capacidad de expandirse sin fin, encontrando la figura generadora para repetir el patrón que construye el fractal. Pero encerarlo bajo los fractales puede ser contraproducente e incluso equivocado. El infinito más allá de un número es una idea, puede que en algunos casos sea tratado como un número, pero no está encerrado en ningún conjunto numérico.

El infinito en matemáticas describe una cantidad abstracta cuyo tamaño no puede ser definido con una cantidad exacta. Representado con el símbolo ∞, llamado lemniscata, el cual representa el concepto de infinito en las diferentes áreas de las matemáticas. Como ya se ha presentado hasta este momento, no se puede definir concretamente el concepto por ello en las guías realizadas el objetivo es mostrar con los fractales, una expresión de esta.

4.3. ¿Existe la relación del infinito y los fractales?

El infinito puede considerarse un tema aun en desarrollo, presentar a los estudiantes que ellos mismo son parte de un proceso continuo o que aun pueden llegar a aportar, motiva a aprender. Un fractal como los conjuntos de Julia o Newton, usando una adecuada combinación de colores, es novedoso, además de que aún hay muchos elementos de la geometría fractal que quedan por ser analizados.

De la misma manera como Mandelbrot y Frame enuncian en [6] acercar a los estudiantes a los procesos matemáticos, permitirles saber que otros estudiantes de su nivel han hecho aportes, les da la posibilidad de inspirarse y hacer lo mismo. También Mandelbrot aporta que es necesario que los estudiantes sepan hacer fractales, en la guía desarrollada, se usó el software Xaos para la exploración de fractales comunes (Mandelbrot, Julia, Newton, entre otros) y Geogebra , además de entender el concepto de patrón y generador usando figuras comunes.

En conclusión el infinito se presenta en la auto similitud de un fractal, junto con el trabajo de Cantor sobre la numerabilidad y el infinito. El docente puede basarse en las imágenes presentando como en la expansión del conjunto de Mandelbrot, encontrado en sus dendritas la figura inicial, proceso que se repite en cualquiera de las dendritas de la misma, o se puede ampliar esta idea usando otras formas fractales, permitiendo que el estudiante analice y realice conclusiones que lo lleven a la idea de infinito.

CAPÍTULO 5

LÍMITES MATEMATICOS Y FRACTALES

Para los estudiantes es común ver al límite, como reemplazar un valor para obtener otro de una función, en los demás casos (limite indeterminado, tendencia al infinito$\cdots$) pasa a ser también un valor cuyo significado no es del todo claro. Lo anterior abre el camino a otros problemas cuando se trabaja otros temas relacionados con el mismo. Partiendo de esto se construye una guía, que usando los fractales muestre el porqué del límite y su significado en el cálculo.

La palabra límite indica, el final de algo o hasta donde se puede llegar, esta en si es familiar en el vocabulario común y en las matemáticas su significado no está alejado del mismo. El límite más allá de mostrar qué pasa cuando se acerca al valor de una función, permite definir el comportamiento de la misma o la interpretación de que ocurre al acercarse o alejarse del punto evaluado. Esta idea es usada para partir de un polígono, se construya un círculo cuando sus lados tienden a ir al infinito.[14]

Pero hablar de límites en fractales no es común, a pesar de que los más complejos son construidos a partir de funciones, están son funciones iteradas y de acuerdo a su comportamiento resulta una figura fractal. El límite de estas figuras se presentaría como el número o conjuntos de números hacia cual las iteraciones tienden o que no superan. El conjunto de Mandelbrot como uno de los fractales más conocidos, aun oculta muchas cosas, además de la auto similitud, también muestra que en su frontera los números pueden o no pertenecer al conjunto ya que no se puede determinar si estos no se expandirán al infinito o permanecerán en el límite establecido para el conjunto.

Como describe Krieger[15], si se toma un número en la frontera del conjunto Mandelbrot, por ejemplo $\frac{1}{4}$, si se itera la función usando ese valor obtenemos:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$z_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

$$z_3 = \left(\frac{5}{16}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{89}{256}$$

$$z_4 = \left(\frac{89}{256}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0{,}370864...$$

Aunque parece que la iteración tiende a expandirse, no es del todo cierto ya que los pasos que hacen son muy pequeños, dejando en especulación que es lo que ocurre, si usando la idea de límite nos acercamos con valores un poco más pequeños o más grandes ocurriría los mismo. Esto se presenta como una oportunidad de mostrar a los estudiantes, que no todo está escrito y que aún hay cosas en los que ellos pueden hacer parte. Esto es que partiendo de un conocimiento básico, se puede comprender la problemática y aportar por parte de ellos acerca del tema que se les presente.

5.1. La curva de Koch como herramienta

En la figura 5.1 se observa la curva de Koch, estudiada por el matemático Niels Fabian Von Koch. Para el estudio de límite con esta figura, se parte de una línea de longitud 1, se construye a partir de una linea la cual es dividida en tres partes, tomando la parte media se realizan otras dos lineas de la medida de la división formando un triangulo equilátero. Este proceso se repite con las lineas resultante, repitiendo el patrón indefinidamente, para este caso solo usamos en su forma curva y no su forma más conocida como copo de nieve.

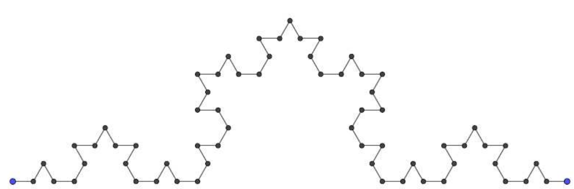


Figura 5.1: Curva de Koch realizada en Geogebra

Para la construcción de la curva de Koch se empieza con una linea cómo en la figura 5.2.

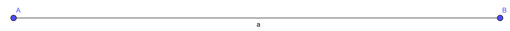


Figura 5.2: Primera iteración de la Curva de Koch en Geogebra

Luego se divide en tres y en la parte media se añaden dos lineas cómo en la figura 5.3.

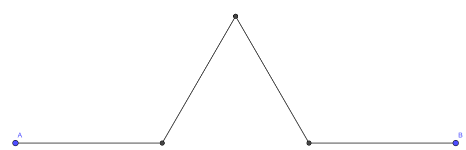


Figura 5.3: Segunda iteración de la Curva de Koch en Geogebra

Esto se repite en la lineas que queden (ver figura 5.4) permitiendo seguir con la forma fractal siempre que haya una linea cómo la inicial.

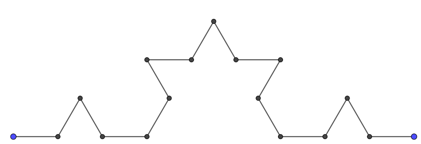


Figura 5.4: Tercera iteración de la Curva de Koch en Geogebra

El proceso para el estudiante consiste, primero en identificar el patrón de forma numérica y gráfica, partiendo de la división de la línea y como afecta el patrón a la longitud de la misma[16]:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

Cada línea segmento mide 1/3 por tanto la longitud total da como resultado 4/3, se repite el proceso para las siguientes iteraciones, teniendo en cuenta la medida de cada segmento y cómo cada segmento es dividido en tres, pero también se ha de tener en cuenta el número de segmentos nuevos en cada una de estas. El estudiante debe llegar a definir de manera general cual es la longitud de la curva, la expresión es:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n}$$

Que describe el comportamiento de la curva de longitud 1.

El objetivo de este punto, es mostrar al estudiante que conocer esta expresión, permite saber el comportamiento de la longitud de la curva. Se usa esta ocasión para presentar al límite y su nomenclatura en las matemáticas:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{n}=\infty$$

Se usa lo aprendido en el tema anterior acerca del infinito, haciendo hincapié de que esto no significa que para cuando la curva este en la n iteración no tomara el valor infinito, ya que este no es un número, si no que para cuando alcance un valor tan grande, la longitud tiende a ser infinita.

5.2. El conjunto de Julia y el conjunto de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot tiene una relación cercana con el conjunto de Julia, cada número que pertenece al primero indica que es un conjunto de Julia, el cual es conexo, o que la figura se construye a partir de la misma es de una solo pieza. Como se ve en la figura 5.5, tenemos al conjunto de Mandelbrot el cual se ha ampliado y se tomó el conjunto de Julia asociado:

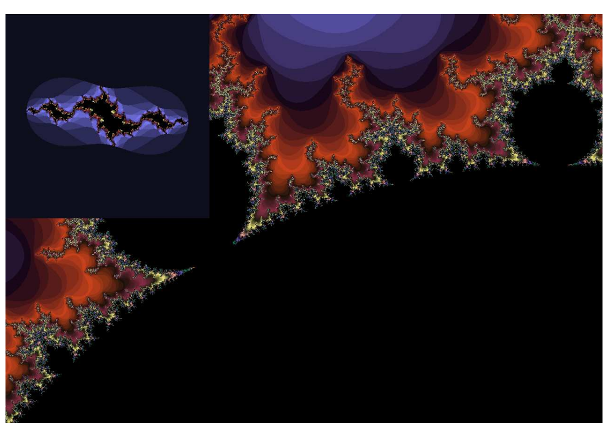


Figura 5.5: Ampliación de conjunto de Mandelbrot con un conjunto de Julia asociado en Xaos

Con el uso del software Xaos, se puede explorar el conjunto de Mandelbrot en diferentes niveles de ampliación, pero de mismo modo permite un modo de Julia Rápido, que donde esté ubicado el puntero del ratón, generá el conjunto de Julia asociado al punto. También permite ver el conjunto de Julia en ese punto de manera ampliada, como se ve en la figura 5.6, permitiendo su exploración de igual manera que el conjunto de Mandelbrot.

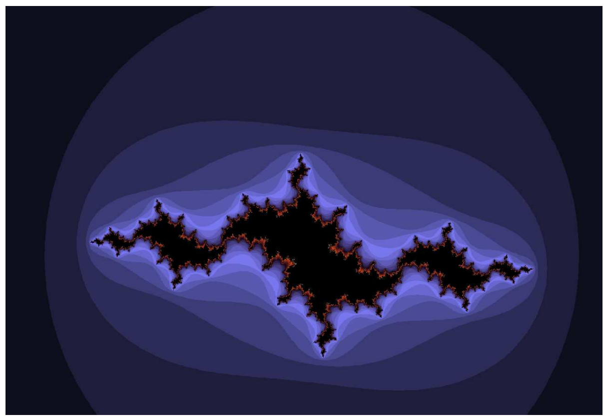


Figura 5.6: Conjunto de Julia ampliado

El conjunto de Julia es creado de manera similar que el conjunto de Mandelbrot partiendo de la función:

$$z_{n+1} = (z_n)^2 + c,$$

dónde c es una constante y z_n es la órbita, o valor que toma cada vez que es iterado. Del mismo modo si un numero de la iteración incrementa hasta el infinito, no pertenece al conjunto, mientras que si queda atrapado en un intervalo establecido pertenece al conjunto. Julia demostró que para saber si el conjunto resultante es conexo o disconexo, basta con analizar cómo es su comportamiento cuando orbita a 0, mostrando que si este escapa al infinito es disconexo o del contrario es conexo, como se ha evidenciado el conjunto de Mandelbrot es construido en la órbita del cero cuyos valores no escapen al infinito.

Sin embargo, se observa que usando el conjunto de Mandelbrot podemos ver conjuntos de Julia disconexos aproximándonos a la frontera del conjunto, como vemos en la figura5.7

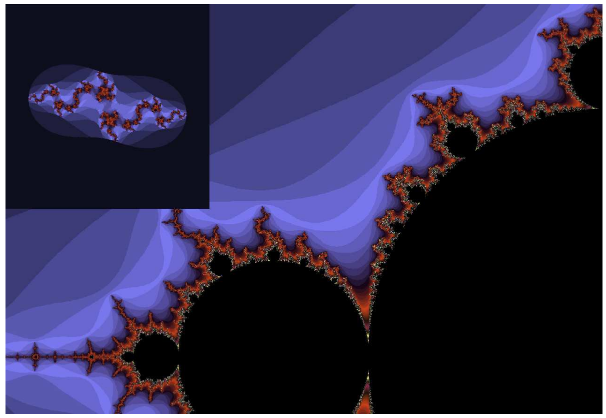


Figura 5.7: Conjunto de Julia Disconexo a partir de un punto cercano a la frontera de Mandelbrot

Y el conjunto disconexo en la figura 5.8.

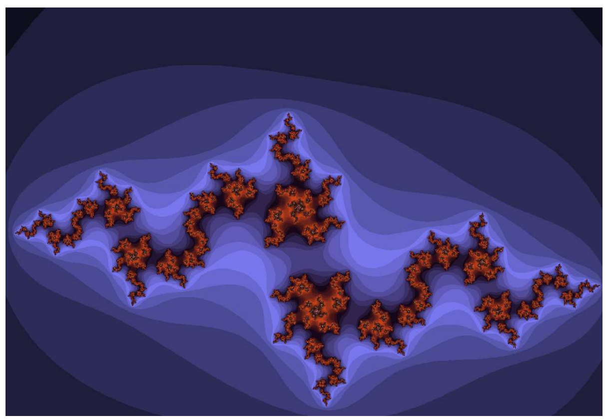


Figura 5.8: Conjunto de Julia disconexo

Se usa esta idea para presentar, la idea de aproximación de los límites, que permite deducir el comportamiento de una función, se usa este símil con el conjunto de Mandelbrot y Julia que al acercarse o alejarse del conjunto Mandelbrot, encontramos los dos tipos de conjuntos de Julia ya tratados.

CAPÍTULO 6

GUÍAS DIDÁCTICAS

Partiendo de la información evidenciada se diseña la siguiente secuencia didáctica:.

Problema: Realizar la conceptualización del infinito y límite matemático a través de la geometría fractal.

Modelo Pedagógico: Constructivista

Pretende la formación de persona como sujetos activos, capaces de tomar decisiones y juicios de valor.
Características:

C1: El ser construye los conocimientos mezclando los conocimientos previos y la relación con el medio que los rodea.
C2: Se aprende haciendo.
C3: El maestro es un facilitador que contribuye al desarrollo de capacidades de los estudiantes para pensar, idear, crear y reflexionar.
C4: Desarrollar las habilidades del pensamiento de modo que puedan progresar, evolucionar secuencialmente en las estructuras cognitivas.
C5: Evaluación cualitativa y se enfatiza en la evaluación de procesos.

Tipo de aprendizaje: Aprendizaje basado en problemas

Estudiante como protagonista de su propio aprendizaje.

Características:

K1: El aprendizaje de conocimientos tiene la misma importancia que la adquisición de habilidades y actitudes.
K2: Los estudiantes trabajan de manera autónoma.
K3: Supone la búsqueda, entendimiento, integración y aplicación de conceptos básicos y otros relacionados con el problema.
K4: El estudiante descubre qué necesita para avanzar en la resolución de un problema.
K5: Se busca el trabajo en equipos de trabajos pequeños

A continuación se organizan estas características y se escogen las que son mas adecuadas para el desarrollo de la guía, como se ve en la tabla 6.1.

	Constructivismo					
Aprendizaje basado en problemas		C1	C2	C3	C4	C5
	K1	2	3	2	2	3
	K2	4	5	3	4	2
	K3	2	3	5	4	1
	K4	1	1	2	5	3
	K5	2	4	4	2	3

Tabla 6.1: Selección de aspectos a destacar para la realización de la guía

Se construye también alrededor de la teoría: situaciones didácticas de Guy Brousseau, que enuncia lo siguiente:

Construido por Guy Brousseau [23] enuncia que los conocimientos no surgen de la nada, sino hay que buscar la manera de que estos surjan de manera que se vuelvan propios del que está aprendiendo.

Esta teoría busca que los estudiantes, busquen de sus conocimientos enfrentarse a sus dificultades, obstáculos siendo estudiantes que se adapten y sepan desenvolverse a las situaciones a las que se enfrentan. Las respuestas a estas son el resultado del proceso educativo.

Las situaciones son la interacción del sujeto con el medio al que se le presenta, el estudiante evalúa sus saberes previos o puede construir nuevos saberes.

Como objetivo principal de esta teoría las situaciones presentadas tienen que ser de interés para los estudiantes, o el objetivo de proceso educativo puede no ser satisfactorio, esto además de los acuerdos didácticos planteado hace al estudiante responsable del proceso y genera metas tanto para el profesor como el estudiante.

Cada docente tiene en su conocimiento del grupo al que va dirigido, como llevar de manera correcta la guía con los tiempos, que crea pertinente, se recomienda tres sesiones y aunque no es estrictamente necesario el uso de computadores, la experiencia para los estudiantes es mucho más beneficiosa, si pueden por ellos mismo desarrollar los fractales. De igual manera se adjunta los fractales básicos tratados, realizados en Geogebra, y para los fractales Conjunto de Mandelbrot y Julia, se usó el software Xaos, por su facilidad de manejo y el potencial del mismo.

6.1. Inicio

La guía inicial trata sobre la introducción a la geometría fractal, las figuras fractales se pueden encontrar fácilmente en los árboles, por lo que una idea adecuada es llevar a los estudiantes a reconocer estas figuras y compararlas con figuras geométricas comunes para reconocer las diferencias entre ellas. La actividad puede ser llevada como se muestra en la tabla 6.2.

La guía 1 encontrada en los anexos, muestra un proceso más detallado de lo descrito en la tabla 6.2, que puede ser de utilidad en caso de no tener acceso a ordenadores, pero es recomendado el uso de lo mismo par aun experiencia más cercana para el estudiante.

N°	**Hora o Tiempo**	**Actividad**	**Recursos**
1	30 Min	Se presentan figuras geométricas comunes, los estudiantes deben identificar la figura a la que pertenecen, se presenta luego formas fractales e identifican que formas similares tienen. Además, los estudiantes enuncian el origen de cada figura presentando	Objetos de forma geométricas comunes, imágenes o fotografías de objetos fractales en la naturaleza
2	15 Min	Se presenta a los fractales, con una breve introducción histórica, mostrando su diferencia con las figuras geométricas comunes, pero que pueden ser construidas con las mismas	Tablero Computadores
3	45 Min	Se construye el fractal Triangulo de Sierpinky, se aprende que es un patrón, y como este se repite para formar la figura, también como se ha de repetir el mismo en la figura creada	Computadores Papel lápiz Otros Materiales
4	20 Min	Se presenta el conjunto de Mandelbrot y las condiciones del mismo para ser realizados. Se puede mostrar la ampliación del mismo usando el software Xaos, o con otras imágenes disponibles en la red.	Computadores. Imágenes del conjuntoTablero.

Tabla 6.2: Actividades iniciales para la apropiación del conocimiento

6.2. Desarrollo de los conceptos infinito y límite

Las guías dos y tres, desarrollan los conceptos de infinito y límite respectivamente, partiendo de los fractales como herramienta. En la tabla 6.3 se muestra el desarrollo para el concepto de infinito, mientras que en la tabla 6.4 se desarrolla el límite matemático.

N°	**Hora o Tiempo**	**Actividad**	**Recursos**
1	30 Min	Partiendo del conjunto de Cantor se muestra con el uso de modulo en cada iteración, como una figura fractal es Auto semejante, se refuerza la identificación de patrones y se muestra como la ampliación o zoom puede afectar la figura.	Computadores Tablero
2	15 Min	De manera similar que, con el conjunto de Cantor, se muestra la auto similitud en el triángulo de Sierpinski, como introducción a la idea de Cantor de una cantidad infinitita entre el 0 y el 1	Tablero Computadores
3	20 Min	Se presenta en la recta numérica la idea de Cantor sobre la cantidad infinita de números racionales entre el 0 y el 1, se presenta entonces al infinito más que un número como una idea para representar esta situación y las anteriormente presentadas	Computadores Papel lápiz Otros Materiales
4	15 Min	Usando el Conjunto de Mandelbrot se muestra cómo este se puede ampliar indefinidamente o infinitamente mostrando figuras llamativas y que solo depende del procesamiento del computador para continuar las veces que se quiera.	Computadores

Tabla 6.3: Desarrollo del concepto de Infinito a través de los fractales

N°	Hora o Tiempo	Actividad	Recursos
1	30 Min	Se presenta la curva de Koch y como esta vez se le dará un valor de longitud, además de identificar el patrón de la figura, se ha de llegar a la identificación del patrón de comportamiento de la longitud de la figura.	Computadores Tablero
2	15 Min	Luego de definir lo anterior se presenta la idea de Límite, como la forma de distinguir el comportamiento en un punto de una función, o como el caso de la curva de Koch saber cuál será la longitud de la misma.	Tablero Computadores
3	40 Min	Usando el conjunto de Mandelbrot y los conjuntos de Julia se presenta la relación de los mismos, mostrando la idea de aproximación y cómo se relacionan con la de límite	Computadores Papel lápiz Otros Materiales

Tabla 6.4: Desarrollo del concepto de límite

6.3. Resultados encontrados

Partiendo de la interrogante inicial ¿Es posible abordar el concepto de infinito y límite matemático a través de la geometría fractal?, se encontró primero si es posible definir una relación entre los conceptos enunciados y la geometría fractal, esta relación se encuentra para el infinito, en la auto similitud que permite mostrar la idea del infinito, que sirve de base para el desarrollo de otros conceptos dentro de las matemáticas en el que el infinito hace parte.

Para el límite se encontró la relación en el análisis de la longitud de figuras fractales simples, que permite llegar al concepto de límite analizando sus patrones, mostrando al límite como una forma de análisis para determinar el comportamiento de la figura de acuerdo al número de iteraciones de la misma. Por otra parte, usando la relación existente entre el conjunto de Julia y el de Mandelbrot, se puede mostrar la idea de aproximación, ya que se puede observar que los números fuera del conjunto de Mandelbrot, son conjunto de Julia disconexos, esto se puede conectar con la idea de aproximación del límite.

De esta manera los dos conceptos pueden ser llevados a los salones de clases, como una manera diferente de aprender, con el uso de la geometría fractal, pero se hace indispensable el uso de ordenadores, ya que los fractales además de ser llamativos visualmente, su construcción también es muy interesante y brindar la oportunidad de hacerlos en el salón de clases, es una experiencia que beneficiará todo el proceso. Lo anterior no limita que se pueda realizar el proceso, ya que los fractales se construyen de diferentes maneras y con diferentes materiales didácticos.

En conclusión se realizaron tres guías que permiten una base para los docentes a la hora de llevar al aula, para la introducción o refuerzo de los dos conceptos tratados, que no limiten al docente, sino que sean herramientas para hacer una sesión de clases diferentes, que les permita a los estudiantes ver a los fractales como un concepto aun estudiado y del cual pueden ser parte.

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

CONCLUSIONES

Se mostró que es posible abordar los fractales desde un punto de vista educativo, a pesar de que estos sean tratados de manera diferente a la geometría común, tienen sus propias características, cuyas formas son comunes de encontrar en la naturaleza. Se describió la historia de los mismos, antes del reconocido padre de los fractales Mandelbrot, siendo él la culminación de diferentes ideas que por la falta de computadores no pudieron ser llevadas en su totalidad.

El infinito tiene relación con las formas fractales, no solo por la capacidad de estas figuras de poder ser repetidas indefinidamente, sino en la auto similitud de estas formas. Se puede encontrar la forma inicial de un fractal dentro de sí mismo en cualquier iteración o ampliación del mismo, lo cual relaciona esto con los aportes de Georg Cantor, acerca de la *teoría de conjuntos*, numerabilidad e infinito, haciendo un símil con sus estudios de los números racionales y la posibilidad de encontrar infinidad de estos entre dos números.

El límite matemático se relaciona con la geometría fractal en dos aspectos, en el análisis de los patrones, estos pueden ser llevados a funciones que permiten saber la longitud de una figura fractal, sin tener que realizar las figuras, estos es que se puede establecer como el límite de la misma como este en cada iteración se tiende a ser su longitud. En el segundo aspecto se muestra cómo se puede utilizar la aproximación en el conjunto de Mandelbrot y de Julia, dentro del conjunto de Mandelbrot, los números asociados son conjuntos de Julia conexos mientras que por fuera del mismos son disconexos. Finalmente se refuerza que el límite en la frontera de Mandelbrot no se puede definir con exactitud el comportamiento de los mismos.

Se evidencian tres guías educativas que con base a los fractales sirvan de introducción para los conceptos de límite e infinito matemático. Estas guías hechas desde la metodología del constructivismo, esto para que los estudiantes desarrollen por sí mismo el conocimiento, confrontando con lo que han aprendido y van aprendiendo y construyan así los conceptos que servirán de base para otros. Además de buscar despertar el interés de los estudiantes, con las llamativas formas fractales.

SUGERENCIAS

El uso de ordenador beneficia cuando se trata de fractales, ya que aprender a hacer estas figuras es enriquecedor. Por ello es recomendado una extensión a las guías donde se use software y su uso paso a paso para la realización de fractales. Entre los softwares recomendados están: Xaos y Geogebra, que son programas de uso libre y software pago tal como Matlab y Ultra Fractal.

La frontera del conjunto de Mandelbrot aún se puede estudiar más, fuera del ámbito educativo se recomiendan estudios que permitan aclarar acerca de lo que ocurre en la misma y como esto se puede relacionar con los conjuntos de Julia.

El infinito es un concepto importante para las matemáticas, diferentes áreas de la misma lo tratan con alguna cualidad,esto se puede hacer a través de los fractales y otras áreas presentar al infinito y cómo se comporta en el área específica, ya que en el presente documento se trató al mismo como una base desde la cual partir para las demás áreas.

Respecto a el límite matemático se pueden expandir a la relación con los fractales, si se trata con funciones y sucesiones, estas últimas más cercanas a los fractales, se pueden encontrar más maneras de relacionar los mismo y llevarlos a los salones de clases para encontrar más oportunidades para mejoras los procesos educativos.

Se puede aportar mejoras al proceso presentando al llevar el acercamientos de los conceptos a través de los fractales tanto de parte de los estudiantes como los propios docentes. Se ha de tener en cuenta a qué institución y población se ha de llevar, ya que hay que tener en cuenta acceso a computadores, conocimientos previos y disponibilidad de tiempo y recursos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] C. Jiang, Z. Lu, J. Zhou, *Evaluation of fractal dimension of soft terrain surface*,Journal of Terramechanics, Vol 70, 2017.

[2] A. Mathias, R. Viana, T. Kroetz, *Fractal structures in the chaotic motion of charged particles in a magnetized plasma under the influence of drift waves.*,Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Vol 469, 2017.

[3] Hernandez Luis Manuel, *Sucesiones y la dimensión fractal*,Revista digital Matematica, educacion e Internet, Vol 12, 2012.

[4] Rivera Moises Hinojosa, *Aplicación de geometría de fractales a la descripción de microestrecuturas metálicas*, Universidad Autonoma de Nuevo Leon, 1996.

[5] Figueiras, L., Molero, M., Salvador, A., Zuasti, N, *Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales*, SUMA, Vol 35, Universidad de Zaragosa, 2000.

[6] Mandelbrot B. B., Frame, M, *Some Reasons for the Effectiveness of Fractals in Mathematics Education.*, Mathematical Association of America, Washington DC ,2002.

[7] Vargas Gil Carlos Andres, *El género literario del cuento como estrategia didáctica para abordar el concepto de infinito en el grado 11-3 de la institución educativa sor maría juliana del municipio de Cartago (Valle del Cauca).*, 2016.

[8] Dall Alba Sabrina Garbin, *¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La infulencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matematicos.*,RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, Vol 8, 2005.

[9] Mandelbrot B., *Fractal Geometry : What is it, and what does it do?*,Mathematics deparment ,Yale University, New Haven,Connecticut, 1989.

[10] Santander Hugo, *Zenon, Aquiles, La tortuga y la demostración del infinito.*

[11] *Recuperado de: https://sites.google.com/site/uamilogicayconjuntos/home/3-semana-3/iii-3-de-lo-numerable-a-lo-transfinito/1-conjuntos-infinitos.*

[12] Trochet H, *A history of Fractal Geometry*,Recuperado de: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/fractals.html ,2009

[13] González Alvarez Claudia María , *Primera Unidad: Teorías Constructivistas. En Aplicación del Constructivismo Social en el Aula* Guatemala: de Estados Iberoamericanos para la Educación la Ciencia y la Cultura,OEI Oficina Guatemala,, 2012.

[14] Marshal J., *What is The Mathematical Limit?*, Recuperado de: http://www.quickanddirtytips.com/education/math/what-is-a-mathematical-limit, 2015.

[15] Krieger Holly, *The Mandelbrot Set:Numberphile*, Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=NGMRB4O922I, Numberphile, 2014/07/25.

[16] *Recuperado de http://yestoparaqsirve.blogspot.com.co/2012/04/limites-de-sucesiones-y-fractales.html.*

[17] Rivera Eduard, López Ricardo, *Evidencia de propiedades fractales en la sucesión de Fibonacci usando wavelets.*,Scientia et Technica,Año XVII, No 52, Universidad Tecnológica de Pereira, Diciembre de 2012.

[18] Fernandez Oscar, Martinez Lorenzo, Salas Alvaro, *Coeficiente polinomiales para funciones límites de series de potencias, una analogía con el triangulo de Pascal.*,Scientia et Technica,Año XV, No 52, Universidad Tecnológica de Pereira, Diciembre de 2009.

[19] Rodríguez Ossa James, *Una didáctica para el aprendizaje del concepto de infinito mediado por las TIC en grado décimo de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario del Municipio de Belén de Umbría*,Universidad Tecnológica de Pereira, Facultad de Ciencias básicas, Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, 2017.

[20] Hernández Diosa Leidy Lorena, Victoria Tamayo Juan David, *Proceso de enseñanza-aprendizaje en el marco de la plataforma moodle de los estudiantes y docente de grado 11B en la asignatura páginas web, de la institución educativa Sur Oriental de Pereira*,Universidad Tecnológica de Pereira, Facultad de Ciencias de la Educación, Licenciatura en Comunicación e Informática Educativa, 2013.

[21] Carrascal Arias, Arfaxad Javier, Román Grajales Viviana Marcela, *Diseño de un AVA como recurso para potenciar los procesos de aprendizaje en lecto-escritura en estudiantes de grado primero de la Institución educativa Normal Superior .El Jardín"de Risaralda*,Universidad Tecnológica de Pereira, Facultad de Ciencias de la Educación, Licenciatura en Comunicación e Informática Educativa, 2016.

[22] Cantor, Georg, *Fundamentos para una teoría general de conjuntos: escritos y correspondencia selecta*,ed. Ferreirós Domínguez, José; tr. Ferreirós, José; tr. Gómez-Caminero, Emilio (1 edición). Editorial Crítica, 2005.

[23] Brousseau Guy, *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*,ed. Libros del Zorzal, Argentina, 2007.

ANEXO 1

GUIA 1

GUIA 1

Objetivos

- Detectar una figura fractal y describir su definición básica.

- Definir las diferencias entre las figuras fractales y las de geometría común.

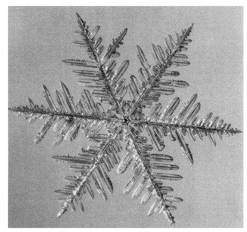
Nota docente:*En la siguiente actividad, el estudiante deberá reconocer las figuras geométricas básicas que se encuentran en objetos de uso común, de manera ideal el docente puede llevar objetos que puedan manipular y que estos identifiquen las formas origen o básicas de los mismos.*

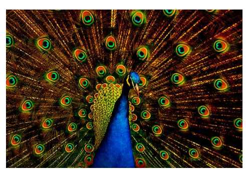
En las siguientes figuras identifiquemos a qué figura geométrica se parece:


¿ Como fueron creados estos objetos? Podrías darles otra forma a estos objetos sin perder su utilidad .

En las figuras encontramos objetos geométricos a los que ya estamos acostumbrados, tales como círculos, cilindros, cuadrados, rectángulos entre otros. Son figuras que vemos en diferentes puntos todos los días. Ahora miremos las siguientes imágenes y hagamos una actividad similar con las siguientes figuras:

Nota docente:*En este primer acercamiento a los fractales los estudiantes pueden no comprender su objetivo, se ha de guiar a los mismos a que lleguen a conclusiones de los mismo tales como: que no tienen un figura clara, que siguen patrones, o conclusiones que cada estudiante puede dar para llegar al concepto de fractal.*




Podemos ver que el segundo conjunto de imágenes son parte de la naturaleza y no es fácil identificar una forma geométrica a la que pertenezcan y de la que estemos familiarizados. Estas figuras que podemos ver en la naturaleza se conocen como fractales.

Las figuras fractales son un objeto relativamente nuevo de estudio, su nombre fue dado por Benoit Mandelbrot un matemático que, al encontrar este tipo de figuras en su trabajo, se fascinó por los mismos y decidió dedicar su vida al estudio de los mismos.

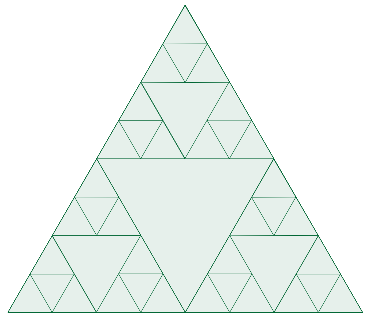
¿Trabajo para pensar, podemos encontrar figuras claras en los patrones de la naturaleza? (Pelaje animal, plumas, mariposas árboles?) o tiene más formas o ninguna?

Nota docente:*Se puede ampliar el concepto dando un breve vistazo histórico de los fractales, cómo surge su nombre y los aportes de Benoit B. Mandelbrot.*

Construcción de fractales

Aunque los fractales parecen tener formas que no podemos hacer, en realidad si podemos realizar figuras que tengan características de los mismo, miremos al triángulo de Sierpensky

Nota docente:*el siguiente fractal puede ser realizado con otros materiales de acuerdo a la disposición del docente, se puede realizar moldes de triángulos para que los estudiantes corten* *en cartulina, o llevar los diferentes triángulos previamente cortados y que el estudiante arme el triángulo como si fuera un rompecabezas.*

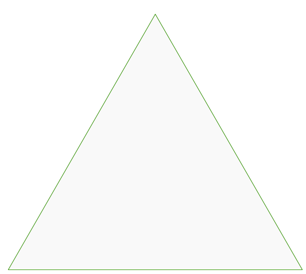


Tiene su nombre por el matemático Waclaw Sierpinsky, se construye a partir de un triangulo equilátero. Identifiquemos características del mismo para poder construir otras figuras similares.

Vamos a realizar paso a paso esta figura y luego identificaremos cual es el patrón que sigue para la construcción del mismo:

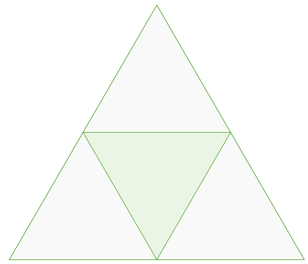
Materiales: Lápiz y papel

Empezamos con un triángulo equilátero:

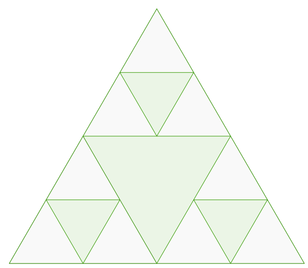


¿Recuerdas qué es un triángulo equilátero qué características tiene? ¿Hay otro tipo de triángulos?, nombra algunos.

Ahora hagamos un triángulo como sigue:

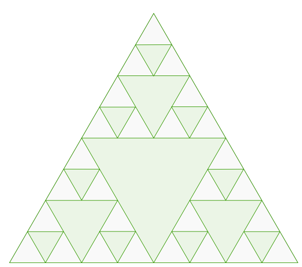


Ahora sigamos haciendo triángulos como sigue:



Vas encontrado algún patrón, ¿Cual es?

Si seguimos haciendo triángulos terminaremos con una figura así



¿ Logras ver el patrón? Una pista es fijarse qué pasa cada vez que hay un triángulo equilátero.

Así es, podemos realizar el triángulo de Sierpinski siguiendo una norma simple, cada vez que veamos un triángulo como el del principio construiremos un triángulo invertido como el del segundo paso.

Esto nos lleva a otra pregunta: ¿el triángulo de Sierpinski tiene final o tiene algún límite?.

Ahora que hemos visto cómo hacer un fractal y hemos visto algunos fractales, podríamos definirlo, vamos a ver algunas características de estas figuras y luego demos un concepto con nuestras propias palabras.

- No son como figuras geométricas que comúnmente conocemos, pero pueden ser hechos con estas

- Son comunes en la naturaleza

- Siguen un patrón.

¿Puedes decir más características? Luego de que lo hagas realiza un concepto de fractal, con tus propias palabras.

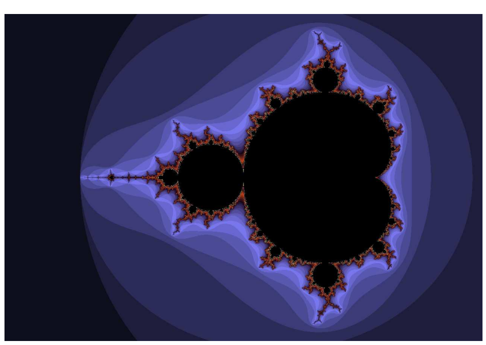
Hasta ahora es posible notar que los fractales se puede construir a partir de cualquier figura geométrica y así es por ejemplo, en el triángulo que realizamos, el patrón se repite cada vez que se veía un triángulo como el original realizamos un triángulo invertido. Siguiendo esta idea para construir un fractal podemos repetir este proceso con otras figuras geométricas.

- Prueba a construir fractales usando otras figuras geométricas además del triángulo recuerda seguir un patrón.

Nota docente:*La idea es que los estudiantes construyan fractales similares al triángulo de Sierpinski, esto puede dar como resultado a figuras innovadoras o similares a otros tales como la alfombra de Sierpinski*

Nota docente:*Recordar a los estudiantes que los fractales no siempre son como los anteriores, puede realizar la actividad de construir el árbol pitagórico como ejemplo de un fractal sencillo que no es similares al trabajado.*

Ahora que estamos familiarizados con algunos fractales vamos a ver como se realizan otros fractales con más detalles:



La imagen representa uno de los fractales más interesantes que se conocen, el conjunto de Mandelbrot. Como ya habíamos dicho un fractal lo podemos encontrar en la naturaleza, pero también podemos realizarlos ya sea bien con construcciones geométricas o iterando una función.
Iterar una función es dar un valor arbitrario a la variable de la función y el valor resultante adicionarlo nuevamente a la función y repetir el proceso con un paso establecido (sumar uno al valor dado, multiplicar por dos etc).

El conjunto de Mandelbrot es el resultado de un conjunto de números que cumplen con la siguiente condición.

La función que se va a trabajar es la siguiente:

$$z = z_n^2 + c,$$

donde c en una constante (número complejo que dejaremos fijo en cada iteración), z_n es el numero resultado de la iteración anterior y empezamos el proceso con $z_0 = 0$ y con un número complejo c cualquiera.

Nota docente:*Es posible en este punto hacer un breve recordatorio acerca de las funciones y números complejos para facilitar, la compresión de este parte, también es posible utilizar los conjuntos de Julia para esta sección., aunque más adelante esto se usaran.*

Tomemos como ejemplo $c = 1$:

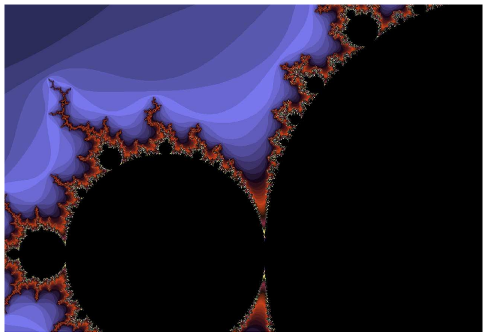
$$z_0 = 0$$
$$z_1 = 0 + 1 = 1$$
$$z_2 = 1 + 1 = 2$$
$$z_3 = 2^2 + 1 = 5$$
$$z_4 = 5^2 + 1 = 26$$

Veamos que la sucesión va incrementando cada vez números grandes, no olvides esta idea.

Ahora tomemos $c = -1$

$$z_0 = 0$$
$$z_1 = 0 + (-1) = -1$$
$$z_2 = (-1)^2 + (-1) = 0$$
$$z_3 = 0^2 + (-1) = -1$$
$$z_4 = (-1)^2 + (-1) = 0$$

Al contrario del anterior notamos que la sucesión no se expande hacia un número muy grande si no parece quedar en un solo. Estos son los números que nos interesan ya que todos los que cumplan con esta condición pertenecen al conjunto de Mandelbrot. Así es que toda la región en negro son números que cumplen con la condición anterior.



Prueba con algunos números que se encuentren dentro de la zona para confirmar si la condición se cumple, recuerda que los números complejos tienen la forma Re+Im así que dentro de del conjunto hay muchos para escoger.

Nota docente:*Hay que recordar a los estudiantes cómo ubicarse en el plano cuando estamos tratando con números complejos, en el caso de la gráfica el eje x es la parte real del número complejo, mientras que el eje y es la parte imaginaria del número.*

Ya hemos visto algunos conceptos acerca de los fractales, pero ahora vamos a trabajar otros conceptos interesantes con la ayuda de ellos, aún hay mucho que ver de los fractales, investiga un poco más acerca de ellos y comparte con tus compañeros aquello que encuentres de estas interesantes figuras.

ANEXO 2

GUIA 2

GUIA 2

Objetivos

- Definir el concepto de infinito matemático a través de la geometría fractal

- Comprender la importancia del infinito y su origen

- Relación del infinito y los fractales, auto similitud

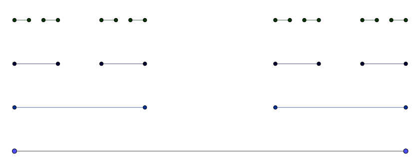
Nota docente:*En esta guía se trabajarán los fractales para introducir y dar a conocer el concepto de infinito matemático, al ser una idea abstracta es importante reconocer que varios estudiantes podrán dar diferentes conceptos del mismo, a la idea del infinito como una cantidad cuyo tamaño no puede ser especificado con un valor concreto. De la misma manera que el estudiante logre encontrar la importancia del infinito en la matemáticas y como ese concepto ha ayudado en el progreso de la misma.*

Antes de seguir jugando con fractales, conozcamos algunas ideas de George Cantor, un matemático que, a pesar de nunca haber conocido a los fractales con tal nombre, dio aportes que nos permitió entenderlos mejor y desarrollar muchos temas con ellos. Cantor que a sus 27 años era catedrático de la universidad de Haile, se interesó en los conjuntos, creando así la teoría de conjuntos, que nos permitió descubrir como saber si un conjunto de numero podía ser contando y planteó una interesante figura que veremos a continuación.

Se empieza con una línea cualquiera:

La cual vamos a dividir en dos partes, así:

Luego para cada trozo que queda, hacemos lo mismo dando como resultado:



¿Ya identificaste el patrón?

¿Según lo que vimos acerca de los fractales, esta figura es un fractal? Justifica tus respuestas

A pesar de ser una figura simple dio las bases para una idea, que muchos matemáticos temían pensar por aquel entonces y quizás ya hayas visto lo que impresionó a Cantor.

Juguemos con esta idea de las líneas construye otro patrón a partir de la línea, construyamos fractales usando patrones similares.

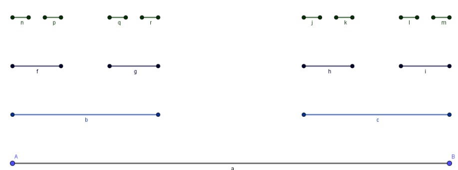
Nota docente:*Recuerde a los estudiantes cómo construir un fractal partiendo de la forma inicial y luego el patrón o generador que se repite en la construcción de la misma. Identifique las ideas de los estudiantes y de presentarse algún error en la creación del fractal, muestre el error o apóyese en otros estudiantes que hayan captada la idea.*

Analicemos la figura un momento y encontremos características de las mismas:

- Empieza con una línea sencilla a la cual la dividimos en dos partes, y para estas partes hacemos lo mismo unas cuantas veces.
- La longitud entre los puntos final e inicial nunca es mayor que la inicial
- La línea cada vez haciendo más pequeña.

Aquí analicemos los siguiente, ¿podemos seguir dividiendo la línea?¿Qué razones habría para indicar que no es posible?. Cuál es tu opinión acerca de esto, qué ideas se te ocurren para demostrar que no se puede seguir dividiendo o por el contrario para demostrar que sí se puede seguir continuando la figura.

Ahora que has analizado la figura vamos a ponerle nombres a la misma y analizar lo que se nos presenta:



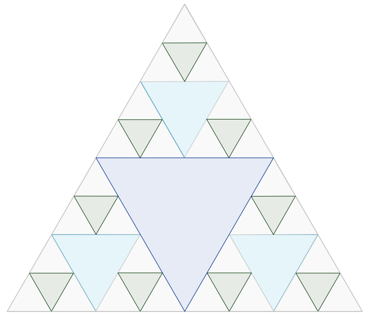
Le agregamos nombres a cada división y color y ahora observa lo siguiente:

Ahora respondamos la pregunta ¿podemos seguir dividiendo la línea? La respuesta, con el zoom a la imagen podemos seguir el proceso otra vez, pero lo más importante es identificar una propiedad importante de los fractales, la auto similitud.

La auto similitud es la propiedad de los fractales en que todas las partes de una figura, son la misma que cualquier otra parte de la figura. Mandelbrot lo define así:

"En general, F es una estructura auto semejante si puede ser construida como una reunión de estructuras, cada uno de las cuales es una copia de F a tamaño reducido (una imagen de F mediante una semejanza contractiva)"[9]

Ahora volvamos al ya conocido triángulo de Sierpinski y realicemos un tratamiento similar al anterior. :



Hemos cambiado el color y podemos notar que las zonas grises son iguales al triangulo inicial, esto nos dice entonces que ahí podemos repetir el patrón la veces que queramos, pero hacer esto a mano puede resultar agotador, por eso la ventaja de tener computadores que nos permite hacer zoom las veces que queramos.

¿Qué idea genera la auto similitud de los fractales?¿Con lo fractales que hiciste en la sesión anterior puedes hacer los que hicimos con el triángulo de Sierpinski y el conjunto de cantor?.

¿ Hay algún final para un fractal, cuál sería el límite o el final de una figura fractal?

Aquí nos enfrentamos con algunas de a las preguntas que se hizo Cantor, el no las vio en los fractales sino en los conjuntos numéricos, miráremos el siguiente conjunto:

$$\mathbb{N} \in [1, 4],$$

que son todos los números naturales entre el 1 y el 4. Los cuales son $1, 2, 3, 4$.

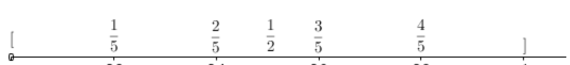
¿Recuerdas cuáles son los números naturales?.

Miremos ahora con el conjunto de los números enteros:

$$\mathbb{Z} \in [-2, 2],$$

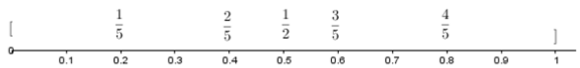
ósea los números enteros entre el -2 y 2. ¿Cuáles serían estos?.

Hasta ahora no hay nada raro y podemos seguir haciendo ejemplos de estos números, pero hay algo mucho más interesante con otros conjuntos de números, pero esta vez veámoslo en la recta con el siguiente conjunto:

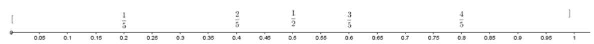


Si miramos desde los números naturales ¿Cuáles números representa la gráfica según este conjunto?¿Qué hay de los números enteros?¿Y qué pasa con los números racionales? Miremos estos números en la recta:

(i)



(ii)



Entonces de igual manera que con los fractales, la lista de los números aumenta si tenemos en cuenta más números racionales, que nos lleva a que entre una cantidad limitada puede haber cantidades sin fin.

Para definir y tratar situaciones como las que hemos trabajado, fue necesario la aceptación de esta idea y este fue el paso más difícil en la historia, la aceptación de una idea de algo muy grande o muy pequeño, o algo que está encerrado en algo que se creía que tenía un límite, así se aceptó la idea del infinito.

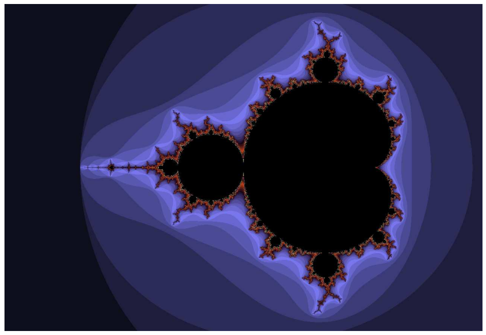
El infinito representa la idea que tratamos antes, una cantidad que no podemos expresar con un valor especifico, con esta idea podemos decir que son infinitos los números racionales entre 0 y 1, ya que no existe una cantidad que exprese tal cantidad de números, podríamos pasa toda la vida escribiendo números entre aquellos dos y aun si no terminaremos. Y está es una característica de los fractales, son infinitos podemos seguir haciendo una figura fractal.

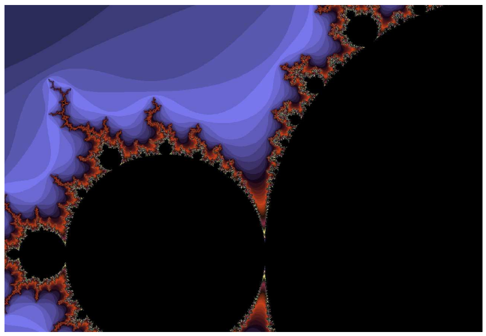
- ¿Puedes definir el infinito con tus propias palabras?
- ¿Reconoces algo infinito en tu vida o algo que se acerque a la idea?
- ¿Hay algo que pueda ser finito y a la misma vez infinito?

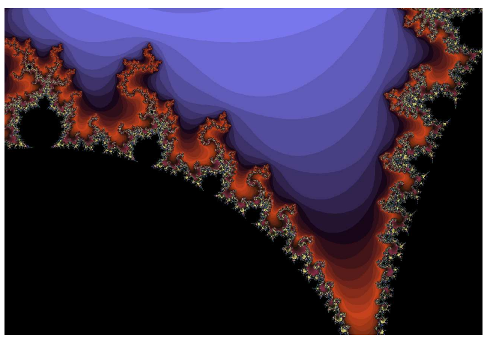
La idea del infinito puede llegar a ser abrumadora, a lo largo de la historia esto hizo que el infinito fuese rechazado o ignorado de manera similar a la historia del cero.

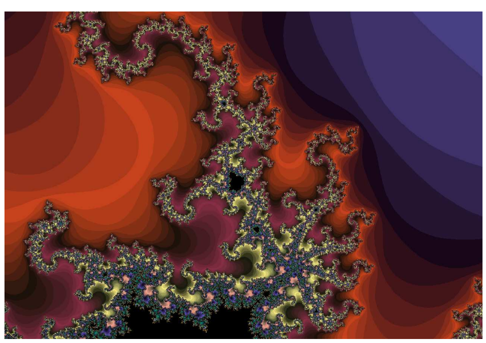
Nota docente:*Es posible ahondar más en la historia del infinito, se puede incluir la paradoja de Aquiles y la tortuga[10], y otras referencias acerca del infinito en la historia, de igual manera mostrar el símil de la historia del cero*

Ahora miremos el infinito en un fractal más complejo, el conjunto de Mandelbrot, recuerdas que el conjunto representa los números que cumplían ciertas condiciones para pertenecer al conjunto, en este punto vamos a mirar el conjunto desde más cerca.









Es un espectáculo que sigue hasta donde los computadores puedan procesar, en las imágenes anteriores solo se hizo un poco de ampliación, recuerdas que el conjunto de Mandelbrot esta atrapado entre en -2 y 2, esto quiere decir que hay algo infinito en algo que no es infinito, por ello cuál es tu opinión de la siguiente pregunta:

¿El infinito es un numero?

Como dijimos antes el infinito representa la idea de un valor que no podemos definir, ya sea porque es muy grande o tan pequeño que no hay manera de darle un valor exacto, por tanto, más que un número es una idea, para representar las situaciones que hemos visto hasta el momento:

El infinito es una idea para representar una cantidad que no puede ser expresada con un valor exacto, un valor que no tiene termino o fin

Nota docente:*Hay que tener en cuenta que el tratamiento del infinito en otras ramas de la matemática varia, más su significado en si es el mismo, lo presente es una base para tratar la idea del infinito de manera más sencilla, y que genere menos resistencia en los estudiantes.*

Ahora que sabemos del infinito y los fractales es correcto afirmar que son infinitos, da tu opinión y discútela con tus compañeros.

ANEXO 3

GUIA 3

GUIA 3

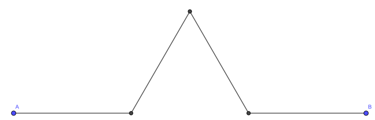
Objetivos

- Explorar fractales para encontrar más cualidades de los mismos
- Encontrar qué es el límite en matemáticas y su importancia

El infinito es una idea que puede ser abrumadora, pero también fascinante, pero los fractales tienen otras cosas por mostrarnos ¿Hasta este momento qué es lo que te ha llamado más la atención?, sobre los fractales y el infinito? ¿Ha cambiado tu definición de los mismos? ¿Has descubierto algo que no hemos tratado hasta ahora?, compártelo con tus compañeros.

Vamos a analizar la curva de Koch:

Al igual que el conjunto de Cantor empieza con un segmento, pero esta vez propondremos que tenga una longitud de 1 unidad y que realizaremos el siguiente patrón:



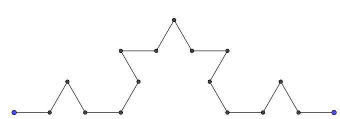
¿Cuánto ha de medir cada línea resultante?¿Cuánto mide ahora la línea, ha cambiado su longitud,que se ha modificado? ¿Cuál es el patrón a seguir para el fractal?.

Nota docente: *Recuerde a los estudiantes el uso de fracciones, la línea al medir 1, se ha partido en tres partes iguales, por tanto cada parte mide 1/3, es importante recalcar que los estudiantes han de tener este concepto claro, para el proceso.*

Igual que en el conjunto de Cantor, el fractal es construido a partir de una línea, la cual dividimos en tres partes, pero ahora que tenemos en cuenta su longitud, ahora la longitud de la Curva es:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

Hemos seguido el patrón en la figura siguiente:



¿Cuál es ahora la longitud de la curva?.

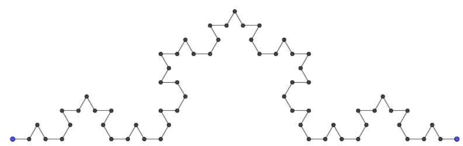
Una manera de verlo es fijándonos en el patrón inicial de la figura fractal, la línea inicial fue dividida en tres partes iguales, por tanto, cada parte ahora es dividida como sigue:

$$\frac{1}{3}\div 3=\frac{1}{9},$$

tenemos otro dato el patrón da como resultado 4 partes por línea, por tanto:

$$16\times\frac{1}{9}=\frac{16}{9}$$

¿Has visto algo similar aquí?, miremos otra iteración y miremos qué ocurre:



Sigamos el proceso anterior:

$$\frac{1}{9} \div 3 = \frac{1}{27}$$

$$64 \times \frac{1}{27} = \frac{64}{27}$$

Podemos seguir haciendo esto muchas veces, pero si queremos saber qué pasa cuando el proceso este en la iteración 77 o en la 12, o incluso en la 120. Puedes hacerlo una a una, pero recuerdas que pasa, cada vez los trozos son más pequeños y necesitaremos un ordenador, pero no es necesario, has visto que en las operaciones ocurre algo muy similar al patrón de los fractales.

$$\text{Primera Iteración } 4^1 = 4$$
$$\text{Segunda Iteración } 4^2 = 16$$
$$\text{Tercera Iteración } 4^3 = 64$$

Ahora ¿Podemos hacerlo aún más general?¿Qué hace falta?

Nota docente:*Antes de continuar con la siguiente sección permita a los estudiantes deducir, la parte faltante del patrón, analice que conclusiones toman cada uno y que tan coherentes son estas.*

Analicemos que ocurre con la longitud de cada parte, primero dividimos en tres partes iguales, $\frac{1}{3}$ en la siguiente iteración $\frac{1}{9}$ por tanto:

$$\text{Primera Iteración } \frac{1}{3} \text{ de segmento}$$
$$\text{Segunda Iteración } \frac{1}{3} \div 3 \text{ de segmento}$$
$$\text{Tercera Iteración } \frac{1}{9} \div 3 \text{ de segmento}$$

Sin embargo, podemos resumir en lo siguiente:

$$\frac{1}{3^n}$$

Que nos permite encontrar cuando será la longitud de cada segmento y por tanto para la curva en total:

$$4 * \frac{1}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Donde n es la iteración donde nos encontremos, así podemos saber la longitud de la Curva de Koch sin tener que hacerla.

¿Pero de que nos servirá esto? Ves alguna utilidad tener esta información

Conocer el patrón de algo nos permite saber cómo se va a comportar, podemos saber cómo va a ser en cualquier momento, así no tenemos que depender exclusivamente de computadores o podemos saber sin tener que realizar la imagen a mano. Incluso podríamos analizar que pasa en el infinito:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\infty}$$

Llegamos antes a la conclusión de que el infinito es una idea pero que muchas veces es tratado como un número, ¿cómo crees que se puede solucionar esta situación?

Hay un modo de describir que pasara en esta situación, como vimos cada iteración al aumentar su longitud se hace cada vez más grande, así que si vamos a la iteración más grande de todas:

$$(\frac{4}{3})^{\infty} = \infty$$

Deducimos que la longitud será infinita ¿Puedes imaginarlo?

Pero hay un nombre en matemáticas para esto, para saber que ocurre con curvas en determinados puntos, esto aplicado a funciones y sucesiones permite aproximarnos a un punto y ver qué valor toma o qué valor podría tomar.
Siguiendo nuestro ejemplo anterior el limite se representa así:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{n} = \infty$$

Resolvamos los siguientes límites, para descubrir que longitud tendrá la curva:

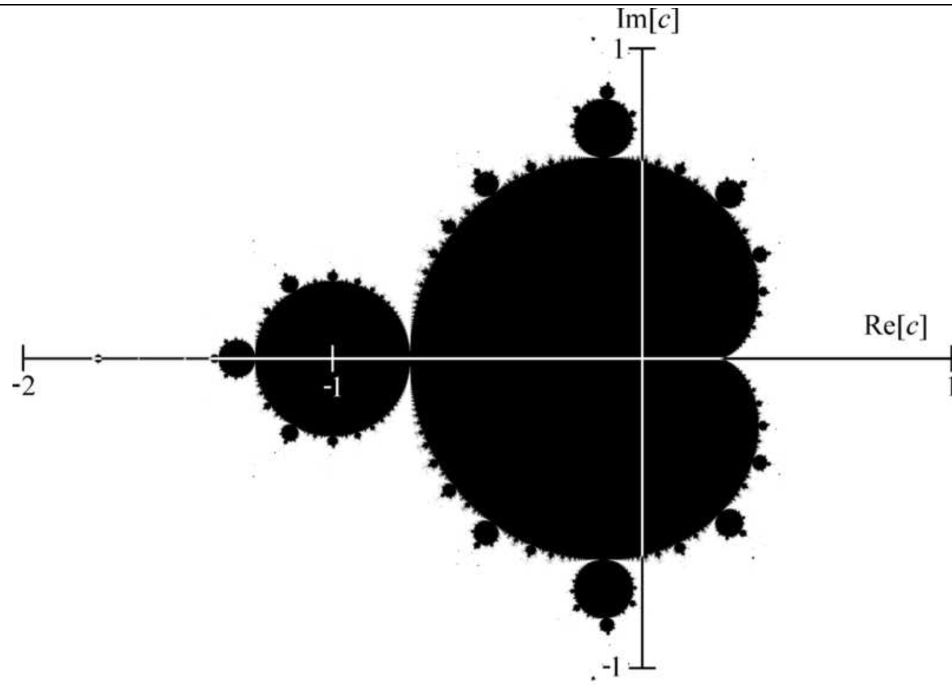
$$\lim_{n\to 4}\left(\frac{4^n}{3}\right)$$

$$\lim_{n\to 77}\left(\frac{4^n}{3}\right)$$

$$\lim_{n\to 120}\left(\frac{4^n}{3}\right)$$

Nota docente: *Recuerde a los estudiantes que los limites es más que solo reemplazar un valor, que su significado es el comportamiento o el valor que toma una función cuando se aproxima a un punto determinado.*

Ahora miremos un conjunto que ya hemos tratado y conocido:



¿Recuerdas cómo era el comportamiento de todos los números dentro del conjunto?

Tomábamos una función a la cual iteramos con ciertos números, si estos cumplían con la condición de no ir hasta el infinito. Pero qué pasa en la frontera, donde los puntos dejan de pertenecer al conjunto. Son puntos que aún no están del todo claro, ya que son puntos que están y que no están dentro del conjunto, puede sonar un poco extraño, pero es algo que aún se investiga, quizás tú puedas aportar algo para aclarar al fascinante conjunto de Mandelbrot.

Como ya hemos venido hablando, los límites nos permiten saber qué pasa con cierto valor en una función y cómo podemos usar esta información, sin embargo, cuando tratamos con iteraciones de funciones, tomar el límite en un punto, no es de mucha utilidad. Pero podemos saber el comportamiento de estas funciones de acuerdo a unas características que enunciamos, en la primera guía:

- La iteración debe quedar atrapada en un número menor que dos.
- La iteración no debe ir hasta el infinito.

Así cuando hablamos de límite en una función que se itera, hablamos del punto o puntos hacia el valor donde la función al iterarse tiende, pero ahora vamos a usar esta idea con otro conjunto similar al de Mandelbrot:

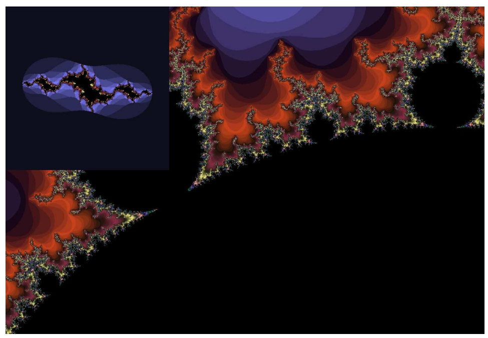
Los conjunto de Julia se construyen a partir de la siguiente funcion iterada:

$$z_{n+1} = (z_n)^2 + c,$$

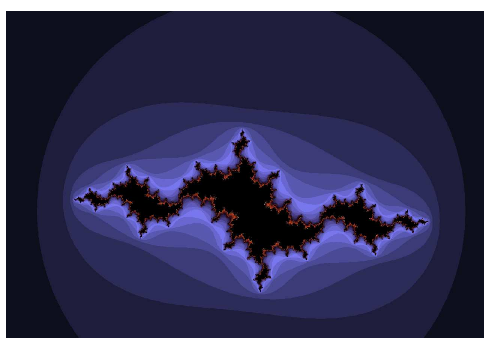
donde c es una constante y zn es la órbita, o valor que va tomando cada vez que es iterado. De mismo modo si un numero de la iteración incrementa hasta el infinito, no pertenece al conjunto, mientras que si queda atrapado pertenece al conjunto. Estos conjuntos que tomaron el nombre, por Gaston Julia que estudió las propiedades de las funciones iteradas, y a pesar de no tener acceso a computadores en su época, pudo demostrar que con solo estudiar la órbita del cero se podía saber como sería el conjunto resultante disconexo o conexo.

Mostró que si la iteracion escapa al inifinito es disconexo o del contrario conexo. ¿ Recuerdas cómo se comporta el conjunto de Mandelbrot?

Miremos un conjunto de Julia con uno de los valores del conjunto de Mandelbrot:

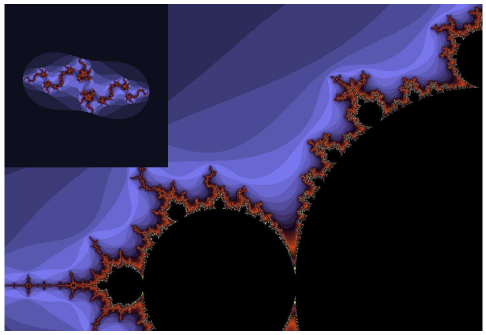


Miremos el conjunto de Julia propiamente:

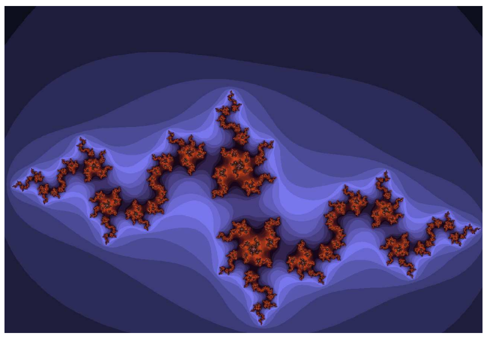


Así todo punto en el conjunto de Mandelbrot tiene un conjunto de Julia asociado ,¿Según esto cuántos conjuntos de Julia asociados existen al conjunto de Mandelbrot?

Recordando las condiciones del conjunto de Mandelbrot, todos los que pertenezcan a este conjunto, son conjuntos de Julia conexos, es decir su figura fractal es solo una, miremos ahora puntos por fuera del conjunto.



Y aquí la imagen ampliada:



Aquí vemos como la imagen fractal, está en trozos separados, así son todos los números por fuera del conjunto de Mandelbrot

Nota docente:*Aquí para una mayor compresión del tema se debe usar software para explorar lo que pasa cuando se acerca a la frontera del conjunto, donde no se distingue claramente si la imagen es conexa o disconexa*

Finalmente veamos qué pasa en la frontera donde el conjunto de Julia aosciado empieza a no ser posible de dsistinguir claramente si es conexo o disconexo